Přírodovědecká
fakulta

Univerzita Palackého
v Olomouci

MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

Jan Tomeček

Olomouc 2020

Přírodovědecká fakulta

Univerzita Palackého v Olomouci

MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

Jan Tomeček

Olomouc 2020

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace vznikla za podpory projektu OP VVV s názvem Univerzita Palackého
jako komplexní vzdělávací instituce, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002337

Recenzenti:

RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.
Mgr. Ivona Tomečková, Ph.D.

1. vydání

ISBN 978-80-244-5743-7

Obsah

Předmluva

Tato skripta vznikla jako učební text k předmětu *Matematická analýza 1* vyučovaného v rámci studijních programů *Aplikovaná matematika* a *Matematika* na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Předpokladem pro čtení tohoto textu je dobrá znalost středoškolské matematiky, zejména pak schopnost úprav algebraických výrazů, řešení rovnic a nerovnic.

První dvě kapitoly tohoto skripta obsahují stručný úvod do predikátové logiky, základní množinové pojmy, potřebné pojmy z algebry a také axiomatické zavedení reálných čísel včetně odvozených pojmů a popis jejich vlastností. Kapitola třetí je věnována zejména pojmu limita posloupnosti, což je jeden z ústředních pojmů matematické analýzy. Další čtyři kapitoly jsou věnovány diferenciálnímu počtu funkce jedné proměnné a jeho aplikacím. A konečně, poslední tři kapitoly představí čtenáři základy integrálního počtu funkce jedné proměnné včetně aplikací.

Jedním z cílů autora byla co možná největší nezávislost na jiné literatuře, tzn. aby čtenář nebyl nucen dohledávat nezbytné pojmy jinde – každopádně je studium založené na různých zdrojích vřele doporučováno. Ve skriptech je kladen důraz na motivaci zavedení příslušných pojmů a také bohatý komentář k řešeným příkladům, což má za následek větší objem celého textu.

Na tomto místě by autor rád poděkoval recenzentům Mgr. Pavlu Ludvíkovi, Ph.D. a Mgr. Ivoně Tomečkové, Ph.D. za jejich cenné připomínky a rady.

Tato skripta vznikla za podpory projektu OP VVV s názvem Univerzita Palackého jako komplexní vzdělávací instituce, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002337.

Kapitola 1

Úvod

Protože téma těchto skript patří do kurzu prvního semestru, jeho čtenáři ještě většinou nemají žádnou zkušenost s vysokoškolskou matematikou. Na střední škole se studenti setkají zejména s úpravami algebraických výrazů, řešením rovnic a dalšími (velmi důležitými) tématy. Kromě toho je ke studiu vysokoškolské matematiky potřeba mít také základní znalosti z klasické matematické logiky a dovednosti potřebné ke čtení a následně i vytváření důkazů matematických vět. V této kapitole si představíme ty nejnutnější základní pojmy, bez kterých by další výklad nebyl možný. Nejsou zde kladeny příliš velké nároky na formální korektnost – cílem je rychlé uvedení do obrazu. Mnohé pojmy jsou v této úvodní kapitole zjednodušeny či úplně zamlčeny. Náročnějšího čtenáře lze odkázat na specializovanou literaturu, např. [1, 2, 13–15]. Kromě toho si zde něco stručně povíme o základech matematiky, axiomatické metodě, o matematických důkazech a jejich struktuře – další lze najít např. v [6, 16, 17]. Zbytek kapitoly je věnován potřebným množinovým pojmům – s mnohými z nich se již student setkal na střední škole. Kapitola je zakončena povídáním o důkazu matematickou indukcí.

1.1 Predikátová logika

Matematika je známá svou přesností. Té je dosahováno mimo jiné pomocí přesného formálního jazyka, který je postaven na *predikátové logice (počtu)*. Ta stanovuje pravidla utváření přesných tvrzení (pomocí tzv. formulí) a pravidla usuzování (jak z pravdivých tvrzení vyvodit pravdivost jiných tvrzení).

1.1.1 Tvorba a pravdivost výroků

Jednotkou informace pro nás bude *výrok* – to je tvrzení, které je buď pravdivé či nepravdivé. V jazyku predikátového počtu budeme výrok zapisovat pomocí řetězců předem definovaných symbolů. Takto vytvořeným řetězcům symbolů říkáme *formule* (tedy formule je jen jistý způsob zápisu výroku).

Cílem této sekce je ukázat jak správně tvořit tvrzení o objektech našeho zájmu (o číslech, různých geometrických objektech, množinách, apod.). Kromě pravidel tvorby výroků (vlastně jim odpovídajících formulí) si zde stanovíme pravidla pro určení jejich pravdivosti. Na cestě za tvořením výroků si představíme mnoho dalších pojmů.

Výroky a jejich pravdivostní hodnoty

Výrokem intuitivně rozumíme každé tvrzení, o kterém lze jednoznačně říct, zda je *pravdivé* či *nepravdivé*, přitom nemůže být pravdivé i nepravdivé zároveň.

Dají se najít všelijaká paradoxní tvrzení, která nemohou být výroky (čtenáře lze odkázat třeba na vědecko-populární literaturu, viz např. [16]). Řekneme-li „Toto tvrzení není pravdivé“, nemůže jít o výrok. Totiž, kdybychom se ptali na jeho pravdivost či nepravdivost, zjistíme v obou případech, že ani jedno není možné. Toto je jedna z motivací zavedení formálního jazyka, který podobná paradoxní tvrzení vůbec neumožňuje vytvořit. Dále např. tvrzení „Petr je sportovec“ můžeme při troše dobré vůle považovat za výrok – tedy za předpokladu, že víme, o kterém Petrovi mluvíme, a je jasné, co znamená slovo sportovec. Tvrzení je totiž pravdivé, pakliže Petr je sportovcem, a nepravdivé, pokud není sportovec. Po pravdě řečeno, „výroky ze života“ nejsou zrovna nejvhodnější. Je např. tvrzení „Slunce svítí na Olomouc“ výrokem? Co se přesně myslí tím, že slunce svítí (jestli je zcela zataženo, slunce i tak svítí, jinak by byla tma)? Který den (který okamžik) se myslí? Závisí pravdivost tohoto výroku na tom, v které části Olomouce se zrovna nacházíme? My naštěstí budeme pracovat s výroky hovořící o matematických pojmech a tam budou výroky vždy v takovém tvaru, že jejich pravdivost/nepravdivost bude jednoznačná – nebude záviset na kontextu, na čase a vše bude přesně definované. Např. rovnost „$1 + 1 = 3$“ bude výrokem. Pokud budeme v tomto textu používat „výroků ze života“, budeme předstírat, že se jedná opravdu o výroky (tedy jde jednoznačně určit, zda jde o pravdivé nebo naopak nepravdivé tvrzení).

Každému výroku lze přiřadit tzv. *pravdivostní hodnotu*: a to „pravda“, jde-li o pravdivý výrok (budeme říkat, že výrok „platí“) a „nepravda“ jde-li o nepravdivý výrok (budeme říkat, že výrok „neplatí“). Abychom to zkrátili, místo „pravda“ budeme psát **1** a místo „nepravda“ budeme psát **0**.

Individua a jejich univerzum

Každá matematická teorie vyslovuje tvrzení o nějakých objektech – představujme si čísla, body, přímky, kružnice, atp. Ve výrocích se bude mluvit o jejich vlastnostech a vztazích mezi nimi. Tyto objekty budeme v této sekci nazývat *individui* a jejich souhrnu budeme říkat *univerzum*. Abychom naše povídání trochu zlidštili, budeme uvažovat následující jednoduchý příklad univerza „ze života“.

Příklad 1.1 Uvažujme nějakou základní školu – třeba ZŠ Stupkova v Olomouci. Naše univerzum bude tvořeno všemi jejími žáky/žačkami (v daném školním roce). Tedy individua budou jednotliví studenti/studentky. K tomuto příkladu se budeme v dalším vracet a budeme na něm ukazovat další pojmy. ◯

Konstanty a proměnné

Budeme-li o individuích mluvit, potřebujeme se na ně nějak odkazovat. K tomu budeme používat *konstanty* a *proměnné* – což budou symboly (hlavně písmena) či řetězce symbolů.

Konstanty budou odkazovat vždy na tatáž individua. Např. $\emptyset$ je množinová konstanta, odkazující vždy na prázdnou množinu, π je konstanta z reálných čísel ukazující na jedno konkrétní reálné číslo zvané Ludolfovo číslo, 0 odkazuje na nulu, atd. Konstantou pro funkce je např. sin, která odkazuje na funkci sinus.

Oproti tomu individua, na která ukazují *proměnné*, se mohou měnit. Např. proměnné pro množiny se většinou značí velkými písmeny, proměnné pro jejich prvky malými písmeny.

Stejně tak reálná čísla, pro která používáme proměnné jako x, y, ε, popř. používáme indexy (např. x_1, x_2) či různé dekorace (např. $\tilde{x}$, $\bar{x}$, x' a podobně). Proměnné odkazující na funkce budou v tomto skriptu často písmena f, g nebo třeba h.

Příklad 1.2 Na naši školu z Příkladu 1.1 chodí tři konkrétní žáci: Adam Novák, Barbora Pospíšilová a Cyril Valenta. Protože o nich budeme často mluvit, označíme si je pomocí konstant. Definujme tedy tři konstanty:

a: „Adam Novák z 1.A“,

b: „Barbora Pospíšilová z 1.C“,

c: „Cyril Valenta z 2.B“.

Tedy symboly a, b, c se budeme vždy odkazovat na zde definovaného žáka/žačku a tyto symboly již nelze použít jako proměnné. Pro ty budeme používat jiné symboly, např. x, y, z, atd. ◯

Predikáty

O individuích zvoleného univerza se budeme vyjadřovat pomocí tzv. *predikátů*, což je souhrnné označení pro

- *vlastnosti* individuí a
- *vztahy* mezi individui.

Vlastností celého čísla může být „být sudé“, „být liché“, „být nezáporné“, a vztahem mezi celými čísly může být „být větší než“ (používá se symbol $>$), „dělí“ (používá se symbol $|$), nebo „být největším dělitelem“ apod. Vztahy mezi množinami jsou např. „být prvkem“, „být podmnožinou“ atd. Ve většině jazyků predikátového počtu se vyskytuje vztah *rovnosti*. Symbol pro rovnost každý zná již ze základní školy, jde o znak $=$.

Každý predikát má svou *četnost*. Jde o počet individuí, které do predikátu vstupují. Zřejmě, vlastnosti mají četnost 1, vztahy mají četnost 2 a větší.

Příklad 1.3 Uvažujme opět ZŠ Stupkova z Příkladu 1.1. Budeme uvažovat následující predikáty:

D: „být dívkou“,	$T_{1.A}$: „být z 1.A“,	K: „kamarádit s“,
C: „být chlapcem“,	$T_{2.B}$: „být z 2.B“,	W: „být vyšší než“.

Predikáty D, C, $T_{1.A}$, $T_{2.B}$ mají četnost jedna a predikáty K a W mají četnost 2. ◯

Poznámka 1.4 (o predikátech) Predikáty nelze volit zcela libovolně. Je-li V vlastnost, každé individuum tuto vlastnost buď má nebo nemá (nic jiného)! Stejně tak pro vztah V četnosti n musí být zcela jasně rozlišitelné, zda libovolná n-tice individuí je ve vztahu V či nikoliv. Zda to platí či neplatí, nemusíme v dané chvíli vědět, ale musí platit právě jedna z těchto možností. Tedy v Příkladu 1.3 má smysl definovat predikát D jen v případě, jsme-li schopni jednoznačně říct o každém individuu ze zmíněné školy zda je dívkou či nikoliv (a to právě jedna z těchto možností – všimněte si, že to nijak nevylučuje možnost existence dalších genderů).

Výrokové funkce

Ukažme si, jak se vytvářejí nejjednodušší *formule.* Nechť V je symbol pro predikát četnosti 1 (jde tedy o vlastnost) a x je proměnná nebo konstanta. Pak řetězec znaků

$$V(x)$$

je tzv. *formule* a v přirozeném jazyce odpovídá tvrzení „individuum x má vlastnost V“. Slovo „tvrzení“ je zde záměrně, nemusí totiž jít o výrok.

- Nechť je x konstanta nebo proměnná, ukazující v dané chvíli na konkrétní individuum. Pak tato formule odpovídá výroku. Tento výrok prohlásíme za pravdivý v případě, že individuum, na které odkazuje x, má vlastnost V, a nepravdivý v opačném případě. Fakt, že jsou možné pouze tyto dva případy, nám garantuje vznesený předpoklad z Poznámky 1.4.

- Je-li x proměnná probíhající univerzum, pak tato formule neodpovídá žádnému výroku, protože pravdivost by závisela na individuu, na které proměnná ukazuje. V tomto případě tedy říkáme, že formule odpovídá tzv. *výrokové funkci jedné proměnné x.*

Poznámka 1.5 (o výrokové funkci) *Výrokovou funkci jedné proměnné* intuitivně považujeme za *pravidlo* přiřazující každému individuu výrok. Ke každému predikátu četnosti 1 se dá „vyrobit“ výroková funkce jedné proměnné a naopak každé výrokové funkci jedné proměnné zase odpovídá jistá vlastnost. Např. v Příkladu 1.3 symbolem D rozumíme predikát „být dívkou“. Pak formule $D(x)$ označuje výrokovou funkci jedné proměnné „žák/žačka je dívkou“, kde x „probíhá“ celou školu. Evidentně nejde o výrok, protože není jasné, o kterém žákovi/žačce ze školy tvrdíme, že je dívka. Ale pokud x ukazuje na konkrétní individuum, pak už jde o výrok. Samozřejmě, formule $D(a)$ již výrok je, protože a je konstanta definovaná v Příkladu 1.2. Tento výrok zní: „Adam Novák z 1.A je dívka“. Jeho (ne)pravdivost nemusí být zřejmá (viz případ Járy Cimrmana), nicméně předpokládáme, že lze o ní objektivně rozhodnout.

Nechť symbol V označuje predikát četnosti $n \geq 2$ (jde tedy o vztah) a $x_1, \ldots, x_n$ jsou proměnné nebo konstanty (nebo mix obojího). Pak řetězcem symbolů

$$V(x_1, \ldots, x_n)$$

je opět formule. V přirozeném jazyce odpovídá tvrzení „individua $x_1, \ldots, x_n$ (v uvedeném pořadí) jsou ve vztahu V“.

- Jsou-li všechna x_i konstanty, popř. proměnné, které v dané chvíli ukazují na jedno individuum, odpovídá tato formule výroku. Ten prohlásíme za pravdivý v případě, že individua $x_1, \ldots, x_n$ (v tomto pořadí) jsou ve vztahu V, a nepravdivý v opačném případě. Fakt, že jsou možné pouze tyto dva případy, nám opět garantuje předpoklad z Poznámky 1.4.

- Vyskytuje-li se mezi nimi m proměnných ($m \geq 1$) probíhající univerzum, neodpovídá formule výroku ale tzv. *výrokové funkci m proměnných* (tzn. zbývajících $n-m$ symbolů x_i jsou buď konstanty nebo proměnné odkazující na konkrétní individua).

Poznámka 1.6 (znovu o výrokové funkci) Výrokovou funkcí n proměnných intuitivně považujeme za *pravidlo*, které (uspořádané) n-tici individuí, přiřazuje výrok. Každému predikátu četnosti n se dá přiřadit výroková funkce n proměnných a každé výrokové funkci n proměnných je možné přiřadit predikát četnosti n.

Příklad 1.7 Pokračujme opět v našem příkladu o ZŠ Stupkova v Olomouci, zejména navážeme na Příklad 1.3. Uvažujme následující formule a jim odpovídající výroky:

- $D(a)$: „Adam Novák z 1.A je dívka“ (nepravdivý výrok)
- $T_{1.A}(b)$: „Barbora Pospíšilová z 1.C je z 1.A“ (opět nepravdivý výrok)
- $W(c, b)$: „Cyril Valenta z 2.B je vyšší než Barbora Pospíšilová z 1.C“ (výrok, jehož pravdivost ale hned není vidět).

Dále formule $D(x)$ (kde x je proměnná) odpovídá výrokové funkci (o jedné proměnné) „Žák je dívka“. Formule $W(a, x)$ odpovídá výrokové funkci (o jedné proměnné) „Adam Novák z 1.A je vyšší než žák“. Přitom této výrokové funkci odpovídá (*nově vytvořená!*) vlastnost: „být vyšší než Adam Novák z 1.A“. ◯

Právě jsme si ukázali formule, které vytváříme ze symbolů pro predikáty, z proměnných a konstant. Formule jsou tvořeny i dalšími, pomocnými, symboly, kterými jsou čárky a závorky. Takto budeme pokračovat dál, formule budou dále tvořeny symboly kvantifikátorů a logických spojek.

Formule jsou vlastně tvrzení v našem formálním jazyce. Přitom odpovídají buď *výrokům*, nevyskytují-li se v nich proměnné probíhající celé univerzum, nebo *výrokovým funkcím* v opačném případě. Výroky a výrokové funkce pak formulujeme i v přirozeném jazyku, což je pro nás srozumitelnější. Formule lze chápat jako jakési kódy, kterými myslíme konkrétní výroky a výrokové funkce.

Poznámka 1.8 Abychom zjednodušili naše vyjadřování, budeme ztotožňovat formule s jejich odpovídajícími výroky/výrokovými funkcemi. Tedy místo slovního spojení „formule odpovídající výroku (resp. výrokové funkci)“ budeme často psát jen „výrok (resp. výroková funkce)“.

Kvantifikátory

Obecným (neboli velkým) kvantifikátorem rozumíme symbol ∀. Je to vlastně obrácené písmeno A, vzniklé jako zkratka německého „allgemein“. Tento symbol používáme následovně. Je-li V predikát četnosti 1 (tedy vlastnost), pak formulí

$$\forall x \;:\; V(x)$$

rozumíme výrok „Pro všechna x platí, že x má vlastnost V“ nebo trochu lidštěji „Každé individuum má vlastnost V“ nebo „Všechna individua mají vlastnost V“; nazýváme tento výrok *obecný výrok*. Protože jde o výrok, je potřeba definovat jeho pravdivost. Obecný výrok prohlásíme za pravdivý, jestliže vlastnost V má každé individuum. V opačném případě prohlašujeme tento výrok za nepravdivý – to nastane v případě, že některé individuum tuto vlastnost nemá!

Existenčním (neboli malým) kvantifikátorem rozumíme symbol ∃. Je to vlastně obrácené písmeno E, které lze chápat jako zkratku německého „existiert“. Tento symbol používáme následovně. Je-li V predikát četnosti 1 (tedy vlastnost), pak formulí

$$\exists x \;:\; V(x)$$

rozumíme „Existuje takové x, že x má vlastnost V“ nebo trochu lidštěji „Alespoň jedno individuum má vlastnost V“; nazýváme tento výrok *existenční výrok*. Protože jde o výrok, je potřeba definovat jeho pravdivost. Existenční výrok prohlásíme za pravdivý, jestliže vlastnost V má alespoň jedno individuum z daného univerza. V opačném případě prohlašujeme tento výrok za nepravdivý – to nastane v případě, že žádné individuum tuto vlastnost nemá!

Příklad 1.9 Ukažme si, jak lze s pomocí definovaných predikátů v Příkladu 1.3 vytvářet kvantifikované výroky o žácích ZŠ Stupkova. Následující tvrzení jsou výroky:

1. $D(a)$: „Adam Novák z 1.A je dívka“ (nepravdivý výrok)
2. $T_{1.A}(b)$: „Barbora Pospíšilová z 1.C je z 1.A“ (opět nepravdivý výrok)
3. $\forall x\ :\ D(x)$: „Všichni žáci ze školy jsou dívky.“ (pravdivý v případě, že jde o dívčí školu)
4. $\exists x\ :\ C(x)$: „Do školy chodí alespoň jeden chlapec.“ (považujeme-li za pravdivý výrok, že Adam Novák z 1.A je chlapec, pak jde o pravdivý výrok).

Následující výroky jsou zřejmě pravdivé: $D(b)$, $C(a)$, $C(c)$, $T_{1.A}(a)$, $T_{2.B}(c)$. ◯

Jak je to s kvantifikátory u vztahů? Pro jednoduchost uvažujme vztah V četnosti 2 (pro vyšší četnosti je to obdobné). Jsou-li x a y proměnné, pak formule

$$\forall y\ :\ V(x,y)$$

znamená „pro všechna y platí, že x je ve vztahu V s y“, nebo jen „pro všechna y platí $V(x,y)$“. Zřejmě o výrok jít nemůže, protože takové tvrzení závisí na proměnné x, která se může odkazovat na jakékoliv individuum. Jde tedy o výrokovou funkci proměnné x, označme ji $W(x)$ – proměnnou y jsme „kvantifikovali[1]“. Uvažujme formuli

$$\forall x\ :\ W(x),$$

která už výroku odpovídá! Jestliže zpětně odkryjeme, co se skrývá za $W(x)$, dostáváme

$$\forall x\ :\ (\forall y\ :\ V(x,y))\,.$$

Poslední řádek nevypadá moc elegantně, takže ho budeme psát jako

$$\forall x\ \forall y\ :\ V(x,y).$$

Jde tedy o výrok – a to proto, že *jsme kvantifikovali všechny proměnné*! Říká, že „pro všechna x platí, že pro všechna y platí, že x je ve vztahu V s y“ a jednodušeji: „pro každé x a y platí, že x je ve vztahu V s y“. Jak zjistíme pravdivostní hodnotu takového výroku? Pomůžeme si pomocnou výrokovou funkcí $W(x)$. Náš výrok je pravdivý v případě, když pro každé individuum x je $W(x)$ pravdivý výrok. Zvolme si takové x, tzn. proměnná x v této chvíli ukazuje na konkrétní individuum. Ptáme se tedy, zda je pravdivé $W(x)$ – což je výrok (ano opravdu, protože x neprobíhá celé univerzum, ale ukazuje na jedno individuum)

$$\forall y\ :\ V(x,y).$$

Ten je pravdivý, když pro každé individuum y je $V(x,y)$ pravdivý výrok. Zvolme si takové y, tzn. proměnná y v této chvíli ukazuje na konkrétní individuum. Ptáme se tedy, zda je pravdivé $V(x,y)$. Shrňme to tedy: Náš výrok je pravdivý v případě, když pro jakoukoliv dvojici individuí, na něž ukazují proměnné x a y, je výrok $V(x,y)$ pravdivý.

Pomocí predikátu četnosti dva a obou kvantifikátorů lze vytvořit celkem osm kvantifikovaných výroků. Vypišme je včetně jejich formulí (v opačném pořadí):

[1] Kvantifikovaným proměnným říkáme *vázané*, ostatním říkáme *volné*.

1. $\forall x\ \forall y\ :\ V(x,y)$: „pro každé x a každé y platí $V(x,y)$",
2. $\forall y\ \forall x\ :\ V(x,y)$: „pro každé y a každé x platí $V(x,y)$",
3. $\forall x\ \exists y\ :\ V(x,y)$: „pro každé x existuje y takové, že platí $V(x,y)$",
4. $\exists y\ \forall x\ :\ V(x,y)$: „existuje y takové, že pro všechna x platí $V(x,y)$",
5. $\forall y\ \exists x\ :\ V(x,y)$: „pro všechna y existuje x takové, že $V(x,y)$",
6. $\exists x\ \forall y\ :\ V(x,y)$: „existuje x takové, že pro všechna y platí $V(x,y)$",
7. $\exists x\ \exists y\ :\ V(x,y)$: „existuje x a y takové, že platí $V(x,y)$",
8. $\exists x\ \exists y\ :\ V(x,y)$: „existuje y a x takové, že platí $V(x,y)$".

Poznámka 1.10 Je důležité pochopit, co tyto výroky vlastně říkají. Výroky 1 a 2 říkají totéž, stejně jako výroky 7 a 8. Podívejme se na výroky 3 a 4. Vypadá to, že se jejich formule liší „pouze" pořadím řetězců „$\forall x$" a „$\exists y$". Skutečně tomu tak je. Ale toto pořadí *odlišných kvantifikátorů* je velmi důležité. Výrok 3 říká, že ke každému x lze najít y (důležité je, že každému konkrétnímu x jsme vybrali jeho vlastní y) tak, že platí $V(x,y)$ Naproti tomu výrok 4 říká, že musí existovat jedno y takové, že pro všechna x (tedy y je vybráno pro všechna x *stejné!*) platí $V(x,y)$.

Nakonec si řekněme, jak je to s jejich pravdivostními hodnotami. Daný výrok je pravdivý, právě když

1. pro každá dvě individua x a y je výrok $V(x,y)$ pravdivý,
2. pro každá dvě individua y a x je výrok $V(x,y)$ pravdivý,
3. postupně ke každému individuu x lze najít individuum y takové, že výrok $V(x,y)$ je pravdivý,
4. lze najít takové individuum y tak, že pro kterékoliv individuum x je výrok $V(x,y)$ pravdivý,
5. postupně ke každému individuu y lze najít individuum x takové, že výrok $V(x,y)$ je pravdivý,
6. lze najít takové individuum x tak, že pro kterékoliv individuum y je výrok $V(x,y)$ pravdivý,
7. lze najít taková individua x a y (může jít o to samé individuum), že výrok $V(x,y)$ je pravdivý,
8. lze najít taková individua y a x (může jít o to samé individuum), že výrok $V(x,y)$ je pravdivý.

Příklad 1.11 Uvažujme následující výroky o studentech ze ZŠ Stupkova v Olomouci, zejména Příklad 1.3, kde jsme definovali predikát K „kamarádit s" četnosti dva:

1. $\forall x\ \forall y\ :\ K(x,y)$: „Pro každé x a každé y platí $K(x,y)$."
2. $\forall y\ \forall x\ :\ K(x,y)$: „Pro každé y a každé x platí $K(x,y)$."

3. $\forall x\ \exists y\ :\ K(x,y)$: „Pro každé x existuje y takové, že platí $K(x,y)$.“
4. $\exists y\ \forall x\ :\ K(x,y)$: „Existuje y takové, že pro všechna x platí $K(x,y)$.“

První dva výroky říkají totéž, a to, že každá dvojice žáků jsou kamarádi (nevyjímaje případ, že každý „kamarádí sám se sebou“). Třetí výrok říká, že každý žák má nějakého kamaráda ze školy. Čtvrtý výrok říká, že existuje takový žák, který kamarádí se všemi žáky ze školy (včetně sebe). ○

Pro zajímavost ještě uveďme následující výroky vytvořené ze vztahu V četnosti 3:

1. $\forall x\ \exists y\ \forall z\ :\ V(x,y,z)$: „Pro každé x existuje y takové, že pro všechna z platí $V(x,y,z)$.“
2. $\exists x\ \forall y\ \exists z\ :\ V(x,y,z)$: „Existuje x takové, že pro všechna y existuje z splňující $V(x,y,z)$.“

Tyto dva výroky jsou zajímavé střídáním obecného a existenčního kvantifikátoru. S využitím kombinatoriky si vypočtěte kolik možných kvantifikovaných výroků můžeme vytvořit ze vztahů četnosti 3 (a obecně n).

Logické spojky

Chybí nám poslední ingredience na tvorbu formulí (a odpovídajících výroků a výrokových funkcí) – tím jsou *logické spojky*. Jak už název napovídá, používají se ke spojování, a to výroků a výrokových funkcí. Existuje jich spousta. Nám bude stačit jen pět – negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence.

První spojku by čtenář ani za spojku považovat nemusel, protože „nespojuje“, ale pomocí ní můžeme z výroku vytvořit jiný výrok. Jde o *unární* spojku (unární znamená jednotkový, spojku používáme na jeden výrok): *negace*.

- *Negace* se značí symbolem $\neg$ a používá se následovně: Je-li A výrok, pak jeho negace se značí $\neg A$ a čte „Neplatí výrok A“. A pravdivost negace výroku? Pokud je A pravdivý, definujeme $\neg A$ jako nepravdivý, a naopak, pokud A je nepravdivý, definujeme $\neg A$ jako pravdivý. Přehledně jde tuto definici zapsat pomocí tzv. *tabulky pravdivostních hodnot*, viz Tabulku 1.1.

A	$\neg A$
0	**1**
1	**0**

Tabulka 1.1: Pravdivostní tabulka negace.

Další námi používané spojky jsou *binární* (binární znamená dvojkové, protože spojují dva výroky): *konjunkce*, *disjunkce*, *implikace* a *ekvivalence*.

- Konjunkce se značí symbolem $\wedge$ a používá se následovně: Jsou-li A, B výroky, pak jejich konjunkce se značí $A \wedge B$ a čte „platí A a (současně) platí B“. Např. konjunkci výroků „měl jsem na oběd knedlík“ a „měl jsem na oběd zelí“ můžeme číst jako „měl jsem na oběd knedlík a zelí“. A pravdivost konjunkce? Výrok $A \wedge B$ je pravdivý pouze v případě, že jsou pravdivé oba dva výroky A a B.

- Disjunkce se značí symbolem $\vee$ a používá se následovně: Jsou-li A, B výroky, pak jejich disjunkce se značí $A \vee B$ a čte „platí A nebo platí B“. Např. disjunkci výroků „jdu zítra do kina“ a „jdu zítra do divadla“ můžeme číst jako „jdu zítra do kina nebo divadla“. A pravdivost disjunkce? Výrok $A \vee B$ je nepravdivý pouze v případě, že jsou nepravdivé oba dva výroky A i B. Je nutné zdůraznit, že *disjunkce se nechápe ve smyslu vylučovacím*, jak tomu většinou bývá v běžné řeči. Např. je-li výrok „jdu zítra do kina nebo divadla“ pravdivý, znamená to, že mým zítřejším záměrem může být návštěva jak kina tak i divadla (ale aspoň jednoho z nich).

- Implikace se značí symbolem $\Rightarrow$ a používá se následovně: Jsou-li A, B výroky, pak jejich implikace se značí $A \Rightarrow B$ a čte „platí-li A, pak platí i B“, „jestliže A, pak B“ nebo „platí B, jestliže platí A“. Např. implikaci výroků „měl jsem na oběd knedlík“ a „měl jsem na oběd zelí“ můžeme číst jako „jestliže jsem měl na oběd knedlík, pak jsem měl (na oběd) i zelí“. A pravdivost implikace? Výrok $A \Rightarrow B$ je nepravdivý pouze v případě, že A je pravdivý a B je nepravdivý. Tuto definici si lze pamatovat pomocí hesla „pravda nemůže implikovat nepravdu, ale nepravda může implikovat cokoliv“. Na rozdíl od předchozích spojek je implikace pro začátečníka poměrně obtížnou spojkou. Je potřeba si uvědomit, že pravdivost výroku $A \Rightarrow B$ *nic neříká o pravdivosti výroků A a B ale pouze o vztahu jejich pravdivostních hodnot.* Zejména nic neříká o platnosti výroku A! Ve výroku $A \Rightarrow B$ se výroku A říká *předpoklad (antecedent)* a výroku B *důsledek (konsekvent).* Je důležité zmínit, že implikace *nezachycuje časovou ani příčinnou vazbu*, např. výrok ve tvaru implikace „Jestliže 2 je sudé číslo, pak křestní jméno autora těchto skript je Jan“ je pravdivý.

  Dále, platí-li výrok $A \Rightarrow B$, pak se říká, že výrok A je *postačující podmínkou* výroku B a také, že výrok B je *nutnou podmínkou* výroku A.

- Ekvivalence se značí symbolem $\Leftrightarrow$ a používá se následovně: Jsou-li A, B výroky, pak jejich ekvivalence se značí $A \Leftrightarrow B$ a čte „platí A právě tehdy, když platí B“. Např. ekvivalenci výroků „měl jsem na oběd knedlík“ a „měl jsem na oběd zelí“ můžeme číst jako „Měl jsem na oběd knedlík právě tehdy, když jsem měl zelí“. A pravdivost ekvivalence? Výrok $A \Leftrightarrow B$ je pravdivý pouze a jen v případě, že A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu. Stejně jako u implikace, pravdivost výroku $A \Leftrightarrow B$ *nic neříká o pravdivosti výroků A a B, ale pouze o vztahu jejich pravdivostních hodnot.* Zajímavé je, že u ekvivalence nemá tolik lidí problém s pochopením, jako u implikace. Platí-li výrok $A \Leftrightarrow B$, pak se říká, že výrok A (resp. výrok B) je *nutnou a postačující podmínkou* platnosti výroku B (resp. A).

Definice pravdivostí výroků vytvořených pomocí binárních spojek je opět vhodné přehledně vypsat do tabulky pravdivostních hodnot, viz Tabulku 1.2.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabulka 1.2: Pravdivostní tabulka vybraných binárních spojek.

Pro zajímavost dodejme, že všech možných unárních spojek je $2^2 = 4$, všech možných binárních spojek existuje $2^4 = 16$, a obecně, všech spojek spojujících přesně n výroků je

2^{2^n}. K těmto číslům docházíme s využitím znalosti tvaru tabulky pravdivostních hodnot a kombinatoriky (ověřte sami).

Cvičení 1.12 Nechť A, B jsou výroky. Odpovězte na následující otázky (návod: použijte pravdivostní tabulku příslušných spojek):

1. Známe-li pravdivostní hodnotu výroku $\neg A$, co lze říct o pravdivostní hodnotě výroku A?
2. Je-li výrok $A \vee B$ pravdivý a B nepravdivý, co lze říct o pravdivosti výroku A?
3. Je-li výrok $A \vee B$ pravdivý a B pravdivý, lze něco říct o pravdivosti výroku A?
4. Je-li výrok $A \wedge B$ nepravdivý a B pravdivý, co lze říct o pravdivosti výroku A?
5. Je-li výrok $A \wedge B$ nepravdivý a B nepravdivý, lze něco říct o pravdivosti výroku A?
6. Je-li výrok $A \Rightarrow B$ pravdivý a A pravdivý, co lze říct o pravdivosti výroku B?
7. Je-li výrok $A \Rightarrow B$ nepravdivý a B nepravdivý, co lze říct o pravdivosti výroku A?

S pomocí logických spojek a několika výroků můžeme tvořit daleko složitější výroky – říká se jim *složené výroky*. Naproti tomu, výrokům, které se nedají zapsat pomocí jednodušších spojených logickými spojkami, říkáme *jednoduché výroky*.

Příklad 1.13 Uvažujme tři jednoduché výroky A, B, C:

A : „svítí slunce“,

B : „prší“,

C : „je duha“.

Pak složený výrok

$$(A \wedge B) \Rightarrow C$$

je výrok, který říká: „Jestliže svítí slunce a současně prší, pak je duha.“ Přitom nás také bude zajímat pravdivostní hodnota tohoto výroku pro různé pravdivostní hodnoty jednotlivých výroků A, B, C. Přehledně je možné je vypsat do tabulky – viz Tabulku 1.3. Zde si můžeme všimnout, že náš složený výrok není pravdivý jen v jediném případě, a to kdyby současně svítilo slunce, pršelo a duha nebyla. ◯

Poznámka 1.14 Zdůrazněme zřejmý ale důležitý fakt, že pravdivost složeného výroku *nezávisí* na obsahu výroků z nichž je spojen logickými spojkami, ale *závisí* pouze na pravdivostních hodnotách těchto výroků!

Důležité jsou takové složené výroky, které pro jakoukoliv pravdivostní hodnotu jednoduchých výroků z nich vytvořených, jsou *vždy* pravdivé[2]. Naše úvahy o takových složených výrocích uveďme příkladem.

---

[2]Známe je už ze střední školy a říká se jim *tautologie*.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow C$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabulka 1.3: Tabulka pravdivostních hodnot výroku $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

Příklad 1.15 Pro libovolné dva výroky A, B uvažujme složený výrok

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A).$$

Jak určit pravdivostní hodnotu takového výroku? Samozřejmě z Tabulky 1.2. Stejně jako v Příkladu 1.13 sestavíme příslušnou tabulku pravdivostních hodnot – viz Tabulku 1.4. Prakticky to znamená, že výrok „Svítí slunce a současně prší“ má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok „Prší a současně svítí slunce.“ Tedy co se týká pravdivosti těchto dvou výroků, jsou zaměnitelné, můžu nahradit jeden druhým! $\bigcirc$

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabulka 1.4: Pravdivostní tabulka složeného výroku $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

Cvičení 1.16 Dokažte, že následující složené výroky jsou pravdivé pro jakékoliv výroky A, B, C (tzn. pro výroky s jakýmikoliv pravdivostními hodnotami):

1. $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$,
2. $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$,
3. $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$,
4. $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$,
5. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$,
6. $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$,
7. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$,
8. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$,
9. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$,
10. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$,
11. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$,
12. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,
13. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$,
14. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$,
15. $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$,
16. $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$,
17. $(A \vee A) \Leftrightarrow A$,
18. $A \vee \neg A$.

[Návod: Inspiraci najdete v Příkladu 1.15.]

Poznámka 1.17 Složené výroky ve Cvičení 1.16 jsou tedy tautologiemi, a až na poslední, který je zásadní pro důkaz sporem, jsou všechny ve tvaru ekvivalence. To ale znamená, že výroky spojené ekvivalencí mají stejné pravdivostní hodnoty – nezávisle na pravdivostních hodnotách jednoduchých výroků A, B a C. Např. podle 12. ekvivalence z Cvičení 1.16 platí, že výrok „Jestliže prší, pak je mokro“ má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok „Jestliže není mokro, pak neprší“, a tak je můžeme nahradit jeden druhým. Tyto ekvivalence budou pro nás mít zásadní význam. Ne náhodou z nich pak dostaneme tzv. *pravidla nahrazení*, viz dále Tabulku 1.7.

Představme si další tautologie. Tentokrát budou ve formě implikace. Naše úvahy uveďme opět reprezentativním příkladem.

Příklad 1.18 Pro libovolné dva výroky A, B uvažujme složený výrok

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B.$$

Jak určit pravdivostní hodnotu takového výroku? Samozřejmě z tabulek pravdivostních hodnot příslušných spojek. Sestavme tabulku pravdivostních hodnot našeho složeného výroku – viz Tabulku 1.5. Fakt, že tento složený výrok je opět tautologie prakticky znamená, že jsou-li např. výroky „jsem nemocný“ a „jsem-li nemocný, pak ležím v posteli“ pravdivé, je pravdivý i výrok „ležím v posteli“. Chci-li tedy ověřit pravdivost výroku B, stačí ověřit pravdivost výroků A a $A \Rightarrow B$. Jinak řečeno, pravdivost výroku B je *odvozena* z pravdivosti výroků A a $A \Rightarrow B$! Jak hned uvidíme, tyto úvahy se dají zobecnit i na další podobné složené výroky. ◯

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
0	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabulka 1.5: Pravdivostní tabulka složeného výroku $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

Cvičení 1.19 Dokažte, že následující složené výroky jsou pravdivé pro jakékoliv výroky A, B, C (tzn. pro výroky s jakýmikoliv pravdivostními hodnotami):

1. $(A \wedge B) \Rightarrow A$,
2. $A \Rightarrow (A \vee B)$,
3. $[(A \vee B) \wedge \neg A] \Rightarrow B$,
4. $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$,
5. $[(A \Rightarrow B) \wedge \neg B] \Rightarrow \neg A$,
6. $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,
7. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [A \Rightarrow (A \wedge B)]$,
8. $[(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \vee C)] \Rightarrow (B \vee D)$.

[Návod: Inspiraci najdete v Příkladu 1.18.]

Poznámka 1.20 Složené výroky ve Cvičení 1.19 jsou opět tautologiemi. A všechny jsou ve tvaru implikace. To ale znamená, že pokud je složený výrok v implikaci nalevo (tzn. antecedent) pravdivý, pak musí být pravdivý i složený výrok implikace napravo (tzn. konsekvent).

Pravdivost antecedentu nám tedy zaručuje pravdivost konsekventu, a to nezávisle nejen na obsahu, ale i na *pravdivostních hodnotách* výroků A, B či C! Např. podle 2. implikace (která je tautologií) z Cvičení 1.19 platí, že pravdivost výroku „Prší“ nám garantuje i pravdivost výroku „Prší nebo svítí slunce“.

Kromě toho si můžeme všimnout, že v antecedentu některých implikací se vyskytují konjunkce. Pak třeba z faktu, že 8. implikace je tautologií, vyplývá, že pravdivost výroků „Jestliže prší, pak je mokro“, „Jestliže dostanu dobrou známku, pak dostanu zmrzlinu“ a „Prší a dostanu dobrou známku“ nám garantuje pravdivost výroku „Je mokro nebo dostanu zmrzlinu“. Z výsledků Cvičení 1.19 tak za chvíli dostaneme tzv. *pravidla odvození*, viz Tabulku 1.8.

Pomocí logických spojek lze spojovat i výrokové funkce! Díky tomu lze naše vyjadřování o individuích znatelně vylepšit. Ukažme si to rovnou na příkladech – spojky pro výrokové funkce definujeme vlastně stejně jako pro výroky s tím rozdílem, že nemá smysl definovat pravdivostní hodnoty.

Příklad 1.21 Vraťme se do naší oblíbené ZŠ Stupkova v Olomouci. Pak následující formule odpovídají výrokovým funkcím:

- $T_{1.A}(x) \Rightarrow D(x)$: „je-li žák/žačka z 1.A, je to dívka“
- $T_{1.A}(x) \wedge T_{2.B}(x)$: „Žák/žačka chodí současně do 1.A i do 2.B“

S pomocí spojek pak lze tvořit následující užitečné výroky:

1. $\forall x : D(x) \Rightarrow T_{1.A}(x)$: „Všechny dívky ze školy chodí jen do 1.A“ (o chlapcích nebo jiných genderech se ve výroku nemluví; nicméně, je-li ve škole vůbec nějaká dívka, pak chodí do 1.A).
2. $\forall x : T_{1.A}(x) \Rightarrow D(x)$: „Všichni žáci z 1.A jsou dívky.“
3. $\exists x : D(x) \wedge T_{1.A}(x)$: „Do 1.A chodí alespoň jedna dívka.“
4. $\forall x : (D(x) \wedge T_{1.A}(x)) \Rightarrow \neg K(x, c)$: „Žádná dívka z 1.A nekamarádí s Cyrilem Valentou z 2.B.“
5. $\forall x : (D(x) \wedge T_{1.A}(x)) \wedge \neg K(x, c)$: „Všichni studenti školy jsou dívky, chodí do 1.A a nekamarádí s Cyrilem Valentou z 2.B.“ (pravdivost či nepravdivost tohoto tvrzení je v dnešní době poněkud problematická, každopádně jde o výrok)

$\bigcirc$

1.1.2 Pravidla usuzování

Moderní matematika stojí na axiomatickém principu. Na začátku každé matematické teorie stojí konečný či nekonečný počet výroků, které se považují za pravdivé – říká se jim *axiomy* dané teorie. Kromě toho je stanoven způsob, jak z těchto (pravdivých) výroků odvozovat další pravdivé výroky, kterým se říká *věty*. Následující pravidla budeme používat při usuzování pravdivosti výroků z axiomů a vět. Rozdělujeme je do čtyř skupin:

- pravidla generalizace a specifikace (o pravdivosti kvantifikovaných výroků),
- pravidla negace (o vztahu negace a kvantifikátorů),
- pravidla nahrazení (o logických spojkách) a
- pravidla odvození (opět o logických spojkách).

Pravidla generalizace a specifikace

Nechť $V(x)$ je výroková funkce o jedné proměnné x.

- **Pravidlo specifikace pro obecný kvantifikátor:** Z pravdivosti obecného výroku $\forall x : V(x)$ plyne, že je výrok $V(a)$ pravdivý pro každé individuum a.
- **Pravidlo generalizace pro obecný kvantifikátor:** Je-li výrok $V(a)$ pro každé (libovolné) individuum a, pak je pravdivý výrok $\forall x : V(x)$.
- **Pravidlo specifikace pro existenční výrok:** Z pravdivosti existenčního výroku $\exists x : V(x)$ plyne, že výrok $V(a)$ je pravdivý pro alespoň jedno individuum a.
- **Pravidlo generalizace pro existenční kvantifikátor:** Je-li výrok $V(a)$ pravdivý pro alespoň jedno individuum a, pak je pravdivý i výrok $\exists x : V(x)$.

Platnost těchto pravidel plyne z definice pravdivosti obecného a existenčního výroku.

Příklad 1.22 Dokažte, že je pravdivý výrok

$$\exists x : T_{1.A}(x).$$

Řešení. Podle Příkladu 1.9 je $T_{1.A}(a)$ pravdivý výrok. Tedy z pravidla generalizace pro existenční výrok vyplývá, že i výrok $\exists x : T_{1.A}(x)$ je pravdivý. ○

Pravidla negace

Nechť $V(x)$ je výroková funkce o jedné proměnné x.

- **Negace obecného výroku:** Výroky

  $$\neg\,(\forall x : V(x)) \qquad \text{a} \qquad \exists x : \neg V(x)$$

  mají stejnou pravdivostní hodnotu.
- **Negace existenčního výroku:** Výroky

  $$\neg\,(\exists x : V(x)) \qquad \text{a} \qquad \forall x : \neg V(x)$$

  mají stejnou pravdivostní hodnotu.

Platnost těchto pravidel plyne z definice pravdivostní hodnoty obecného a existenčního výroku.

Příklad 1.23 Uvažujme univerzum ZŠ Stupkova v Olomouci a predikát D („být dívkou“) z Příkladu 1.3. Pak podle pravidel negace mají následující výroky stejnou pravdivostní hodnotu:

- $\neg(\forall x : D(x))$, tzn. „Není pravda, že do školy chodí pouze dívky“ a
- $\exists x : \neg D(x)$, tzn. „Existuje alespoň jeden školák, který není dívka“.

Všimněte si, že „nebýt dívka“ a „být chlapec“ považujeme za dva různé predikáty. ○

výrok	„jeho negace“
$\forall x\ \forall y\ :\ V(x,y)$	$\exists x\ \exists y\ :\ \neg V(x,y)$
$\forall x\ \exists y\ :\ V(x,y)$	$\exists x\ \forall y\ :\ \neg V(x,y)$
$\exists x\ \forall y\ :\ V(x,y)$	$\forall x\ \exists y\ :\ \neg V(x,y)$
$\exists x\ \exists y\ :\ V(x,y)$	$\forall x\ \forall y\ :\ \neg V(x,y)$

Tabulka 1.6: Negace kvantifikovaných výroků

S těmito pravidly můžeme negovat výroky i s více kvantifikátory. V Tabulce 1.6 jsou kvantifikované výroky a výroky, které mají opačnou pravdivostní hodnotu pro libovolnou výrokovou funkci $V(x,y)$ dvou proměnných.

Vidíme, že negovaný výrok dostaneme nahrazením obecných kvantifikátorů existenčními a naopak, a negací výrokové funkce $V(x,y)$.

Podobně lze postupovat v případě negace kvantifikovaného výroku se třemi a více kvantifikátory. Např. výrok

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ :\ V(x,y,z)$$

má stejnou pravdivostní hodnotu jako

$$\exists x\ \forall y\ \exists z\ :\ \neg V(x,y,z),$$

a to pro jakoukoliv výrokovou funkci $V(x,y,z)$ třech proměnných.

Pravidla nahrazení

Nyní se podívejme na pravidla týkající se logických spojek – tzv. *pravidla nahrazení* (nebo také *logické zákony*). Ta mluví o tom, že některé výroky spojené logickými spojkami mají stejnou pravdivostní hodnotu nezávisle na tom, jakou pravdivostní hodnotu mají výroky, z nichž jsou tyto složené výroky postavené. Ta nejpoužívanější jsou uvedena v Tabulce 1.7. V prvním sloupci této tabulky je uveden název pravidla a v následujících dvou sloupcích výroky, které mají stejnou pravdivostní hodnotu pro jakékoliv výroky A, B, C. K těmto pravidlům jsme dospěli ze závěrů z Cvičení 1.16, kde jsme uvedli celou řadu výroků ve tvaru ekvivalence.

Příklad 1.24 Uvažujme dva výroky:

A : „prší“,

B : „je mokro“.

Podle pravidla *obměny* z Tabulky 1.7 pak výrok „prší-li, pak je mokro“ (tzn. $A \Rightarrow B$) má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok „není-li mokro, pak neprší“ (tzn. $\neg B \Rightarrow \neg A$). Podle pravidla *negace implikace* ze stejné tabulky pak negace výroku „prší-li, pak je mokro“ (tzn. $\neg(A \Rightarrow B)$) má stejnou pravdivostní hodnotu jako „prší a přitom není mokro“ (tzn. $A \Rightarrow \neg B$). ◯

Příklad 1.25 Uvažujme znovu naši školu. Pak výrok

$$\neg\left(\forall x\ :\ T_{1.A}(x) \Rightarrow D(x)\right),$$

Název	První výrok	Druhý výrok
komutativita	$A \wedge B$ $A \vee B$	$B \wedge A$ $B \vee A$
asociativita	$A \wedge (B \wedge C)$ $A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C$ $(A \vee B) \vee C$
distributivita	$A \vee (B \wedge C)$ $A \wedge (B \vee C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
De Morganovy zákony	$\neg(A \wedge B)$ $\neg(A \vee B)$	$\neg A \vee \neg B$ $\neg A \wedge \neg B$
dvojí negace	$\neg\neg A$	A
implikace	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
negace implikace	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
obměna	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$ $A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
spojování předpokladů	$(A \wedge B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
tautologie	$A \wedge A$ $A \vee A$	A A

Tabulka 1.7: Pravidla nahrazení.

který česky zní „není pravda, že všichni z 1.A jsou dívky“ má podle pravidla negace obecného výroku stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok

$$\exists x \,:\, \neg\left(T_{1.A}(x) \Rightarrow D(x)\right),$$

který má podle pravidla nahrazení *negace implikace* stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok

$$\exists x \,:\, T_{1.A}(x) \wedge \neg D(x),$$

tzn. „alespoň jeden žák z 1.A není dívka“. ○

Pravidla odvození

Konečně představme *pravidla odvození*, která jsou v tomto tvaru: Pokud jsou nějaké výroky pravdivé (říká se jim *předpoklady*), pak je nějaký výrok pravdivý (tzv. *závěr*)[3]. Nejznámější (nejpoužívanější) pravidla jsou přehledně sepsána v Tabulce 1.8. Platnost těchto pravidel je poplatná závěrům Cvičení 1.19.

Příklad 1.26 Předpokládejme, že je-li Adam v Paříži, pak je Beáta v New Yorku. Dále předpokládejme, že Adam je v Paříži a Cyril v Římě. Dokažte, že za těchto předpokladů musí být Beáta v New Yorku.

[3] Zde byl k urychlení výkladu vynechán užitečný pojem *úsudku* – viz zmíněnou literaturu.

Název	Předpoklady	Závěr
zjednodušení	$A \wedge B$	A
součet	A	$A \vee B$
konjunkce	$A,\ B$	$A \wedge B$
disjunktivní sylogismus	$A \vee B,\ \neg A$	B
modus ponens	$A \Rightarrow B,\ A$	B
modus tollens	$A \Rightarrow B,\ \neg B$	$\neg A$
hypotetický sylogismus	$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
absorpce	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow (A \wedge B)$
konstruktivní dilema	$A \Rightarrow B,\ C \Rightarrow D,\ A \vee C$	$B \vee D$

Tabulka 1.8: Pravidla odvození

Řešení. Nejprve označíme

- A: „Adam je v Paříži“,
- B: „Beáta je v New Yorku“ a
- C: „Cyril je v Římě“.

Máme dokázat, že za předpokladu platnosti (tzn. pravdivosti) předpokladů:

1. $A \Rightarrow B$: „Je-li Adam v Paříži, pak je Beáta v New Yorku.“
2. $A \wedge C$: „Adam je v Paříži a Cyril v Římě.“

platí závěr, tzn.

- B : „Beáta je v New Yorku.“

Nechť předpoklady platí, tzn. jde o pravdivá tvrzení. Z druhého předpokladu a pravidla *zjednodušení* z Tabulky 1.8 dostáváme, že Adam je v Paříži (tzn. z pravdivosti $A \wedge C$ plyne pravdivost A). Z pravdivosti tohoto výroku a prvního předpokladu, pak s pomocí pravidla *modus ponens* z Tabulky 1.8 okamžitě dostáváme, že Beáta je v New Yorku (tzn. z pravdivosti A a $A \Rightarrow B$ plyne pravdivost B). Tím jsme dokázali pravdivost závěru. ◯

Cvičení 1.27 Dokažte:

1. Jestliže má Marek pravdu, nezaměstnanost se zvýší, a jestli má Anička pravdu, bude tuhá zima. Anička má pravdu. Proto se bude zvyšovat nezaměstnanost, nebo bude tuhá zima, nebo obojí.

2. Jestliže bude léto teplé, nepojedeme v srpnu na dovolenou. Pojedeme v srpnu na dovolenou nebo si koupíme nové auto (nebo obojí). Proto platí, že když bude léto teplé, koupíme si auto.

3. Jestliže bude pít víno nebo jíst sýr, bude ji bolet hlava. Bude pít víno a jíst čokoládu. Proto ji bude bolet hlava.

4. Vražda byla spáchána buď podezřelým A nebo oběma podezřelými B a C současně. Jestliže A nebo B spáchali vraždu, pak byla oběť otrávena. Proto buď C spáchal vraždu nebo byla oběť otrávena.

1.2 Matematické důkazy a jejich struktura

Důkaz matematické věty znamená vyvození pravdivosti výroku (dokazované věty), a to s pomocí axiomů a již dokázaných vět (všechno to jsou pravdivé výroky). Jako nástroj k tomu poslouží pravidla usuzování, která byla popsána v sekci o predikátové logice. Jak bude důkaz vypadat, závisí jak na volbě metody, tak na tvaru dokazovaného výroku (tzn. dokazované věty).

Mezi základní metody důkazu patří zejména:

- **přímý důkaz:** Z axiomů a vět vyvodíme pomocí pravidel usuzování pravdivost dokazovaného výroku.
- **nepřímý důkaz:** Používá se k dokázání tvrzení ve tvaru implikace, tzn. $A \Rightarrow B$. Přičemž se využije logický zákon *obměny* (viz Tabulku 1.7), podle které je pravdivostní hodnota výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ stejná nezávisle na pravdivosti výroků A a B.
- **důkaz sporem:** Místo abychom dokázali, že je tvrzení věty pravdivé, na začátku důkazu sporem vyslovíme předpoklad, že naopak tvrzení věty je nepravdivé, tzn. jeho negace je pravdivá[4]. Pomocí pravidel usuzování pak dokážeme pravdivost nějakého výroku i jeho negace. To ale vzhledem k pravdivostní tabulce negace není možné – říkáme, že „jsme dostali spor“ či „došli jsme ke sporu“ nebo „nějaký výrok je ve sporu s nějakým jiným výrokem“. Následně pak docházíme k závěru, že dokazovaná věta musí být pravdivá.
- **důkaz matematickou indukcí:** Jde o techniku důkazu pro tvrzení ve speciálním tvaru, kde figuruje množina všech přirozených čísel. Podrobně je tato metoda rozebrána v sekci 1.7.

Každá matematická věta se dá zapsat pomocí výrokových funkcí (příslušné teorie), kvantifikátorů, proměnných, konstant a logických spojek. Níže je popsána struktura jednotlivých důkazů v závislosti na tvaru dokazovaného výroku:

(I) **Obecný výrok,** tj. $\forall x : V(x)$, kde $V(x)$ je výroková funkce:

(a) **Přímý důkaz:** Zvolíme x libovolně (ale pevně). Pak dokážeme, že výrok (opravdu je to výrok!) $V(x)$ pro toto konkrétní x je pravdivý. Protože volba x nebyla ničím omezována, z pravidla generalizace pro obecný kvantifikátor plyne, že výrok $\forall x : V(x)$ je pravdivý.

(b) **Důkaz sporem:** Předpokládejme, že výrok neplatí. To znamená, že podle pravidla negace obecného výroku předpokládáme pravdivost výroku $\exists x : \neg V(x)$. Z pravidla specifikace pro existenční výrok plyne, že $V(x)$ není pravdivé pro nějaké konkrétní x. Odtud dojdeme ke sporu.

(II) **Existenční výrok,** tj. $\exists x : V(x)$, kde $V(x)$ je výroková funkce:

(a) **Konstruktivní důkaz:** Nějakým způsobem zkonstruujeme individuum x a ověříme, že $V(x)$ je pravdivý výrok. Z pravidla generalizace pro existenční kvantifikátor pak plyne, že i výrok $\exists x : V(x)$ je pravdivý.

[4] Jistá část matematiků důkaz sporem neuznává – jde o tzv. konstruktivisty. My mezi ně nepatříme, takže jej budeme rádi a často používat.

(b) **Důkaz sporem:** Předpokládáme, že výrok neplatí. To znamená, že podle pravidla negace existenčního výroku předpokládáme pravdivost výroku $\forall x : \neg V(x)$. Odtud dojdeme ke sporu.

(III) $A \Rightarrow B$, kde A, B jsou výroky.

(a) **Přímý důkaz:** Abychom dokázali pravdivost implikace, využijeme pravdivostní tabulku implikace (viz předposlední sloupec v Tabulce 1.2). Z ní lze snadno vidět, že pokud P není pravdivý, pak implikace $A \Rightarrow B$ pravdivá je. A pokud je výrok A pravdivý, pak aby implikace $A \Rightarrow B$ byla pravdivá, musí být pravdivý i výrok B. Postup je tedy následující: Předpokládáme, že A je pravdivý. Za tohoto předpokladu (a s možným využitím axiomů a vět) je potřeba dokázat, že je pravdivý i výrok B. Tím je dokázáno, že $A \Rightarrow B$ je pravdivý výrok.

(b) **Nepřímý důkaz:** Občas je přímý důkaz příliš složitý nebo ani nevíme jak dokázat implikaci přímo. Podle pravidla nahrazení *obměny* (viz Tabulku 1.7) stačí místo $A \Rightarrow B$ dokázat pravdivost implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$. Tu pak již dokazujeme přímo pomocí (a).

(c) **Důkaz sporem:** Předpokládáme, že tato implikace je nepravdivý výrok. Podle pravidla nahrazení *negace implikace* (viz Tabulku 1.7) tedy předpokládáme, že platí výrok $A \wedge \neg B$, tzn. předpokládáme, že (z pravidla zjednodušení z Tabulky 1.8) výrok A je pravdivý a B nepravdivý (tzn. $\neg B$ je pravdivý). Odtud dojdeme ke sporu.

Příklad 1.28 Dokažte, že je-li druhá mocnina celého čísla sudá, pak je toto číslo také sudé.

Řešení. Naše univerzum bude tvořeno všemi celými čísly. V rámci něj použijeme výrokovou funkci „n dělí k" zapisujeme jako „$n \mid k$", tedy tak, jak jsme zvyklí ze střední školy. Máme tedy dokázat pravdivost následujícího výroku:

$$\forall x : \ 2 \mid x^2 \Rightarrow 2 \mid x,$$

což je obecný výrok (viz (I)). Podle (I)(a) zvolme celé číslo x libovolně (ale pevně). Nyní máme dokázat výrok (opravdu jde o výrok!)

$$2 \mid x^2 \Rightarrow 2 \mid x,$$

což je výrok ve tvaru implikace, a podle (III) máme několik možností. Proveďme nepřímý důkaz (viz (III)(b)), tzn. ověřme místo toho pravdivost výroku

$$\neg(2 \mid x) \Rightarrow \neg(2 \mid x^2).$$

Tuto implikaci již dokážeme přímo (viz (III)(a)). Předpokládejme, že x není sudé číslo, tzn. je liché, a dokažme, že x^2 také není sudé, tzn. je rovněž liché. Fakt, že x je liché znamená, že existuje celé číslo k takové, že

$$x = 2k + 1.$$

Pak

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

což znamená, že x^2 je také liché, a to z toho důvodu, že $2k^2 + 2k$ je celé číslo. Tím je věta dokázána[5]. ◯

[5] Výrok je větou až v okamžiku, kdy víme, že je pravdivý, tzn. když vytvoříme jeho důkaz.

1.3 Množiny

Zhruba před sto lety vznikla tzv. *axiomatická Zermelova–Fraenkelova teorie množin* (zkráceně ZF). Od té doby slouží jako základ většiny matematických teorií (není ale jediná; existuje více teorií množin i alternativní základní teorie, např. teorie typů a kategorií). Jedním z důvodů zavedení axiomatické teorie je existence různých paradoxů (viz např. Russellův paradox teorie množin – vygooglete si!). Více lze najít v jakékoliv knize o teorii množin, např. [1].

Nám bude stačit pouze umět pracovat s množinami na středoškolské úrovni, tzn. bude nám stačit tzv. *naivní teorie množin.* Pro naše potřeby používání pojmu množiny nám další paradoxy nehrozí.

Pojem *množiny* zde budeme chápat zcela intuitivně (v ZF je pojem množiny tzv. „primitivum“ neboli „nedefinovaný pojem“). Pod pojmem *množina* budeme rozumět *soubor objektů, o kterých můžeme jasně říct, zda patří do této množiny.* Těmto objektům budeme říkat *prvky množiny.* Aby to bylo jednodušší, množiny budou moct být prvky i jiných množin – tím pádem nebudeme muset definovat pojmy jako systémy množin či systémy systémů množin atd.

Množinové univerzum bude tvořeno právě množinami a jejich prvky (v naivní teorii množin máme dva typy individuí – to je rozdíl od axiomatické teorie množin, kde je pouze jeden typ, čímž je množina). Zdůrazněme, že toto univerzum množinou není (kvůli zmíněnému Russellovu paradoxu).

1.3.1 Vztahy mezi prvky a množinami

Základním vztahem mezi množinami (a jejich prvky) je *vztah náležení.* Fakt, že *a je prvkem množiny M* (a leží v M; a náleží M) budeme značit

$$a \in M.$$

Naopak, negaci tohoto výroku budeme zapisovat

$$a \notin M.$$

Množinu, která neobsahuje žádný prvek nazýváme *prázdnou* a značíme symbolem $\emptyset$ nebo $\{\}$. Taková množina je jediná. Všem ostatním množinám říkáme neprázdné.

Řekneme, že *množina A je podmnožinou množiny B*, jestliže je pravdivý výrok

$$\forall x \,:\, x \in A \Rightarrow x \in B,$$

neboli, každý prvek množiny A je také prvkem množiny B; značíme $A \subset B$.

Říkáme, že množiny A a B jsou si *rovny* (jsou stejné), jestliže platí

$$A \subset B \wedge B \subset A;$$

zapisujeme $A = B$ (jejich nerovnost: $A \neq B$).

1.3.2 Způsoby zadání množin

Často potřebujeme množinu nějak zadat – určit, kterými prvky je tvořena. Nejjednodušším způsobem je vypsat její prvky (říkáme, že množina je zadána *výčtem*). Např. množina

$$A = \{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{a, a, b, c\}$$

je množina obsahující právě tři prvky a, b, c. Odtud vidíme, že množinu lze chápat jako jakýsi pytel, ve kterém máme uloženy její prvky – mezi nimi nejsou žádné vztahy, zejména žádné uspořádání. Pořadí, v jakém jsou prvky množiny zapsány, je zcela irelevantní (v nějakém pořadí je přece napsat musíme). Často budeme pracovat s nekonečnými množinami, tedy zadání výčtem zde není realizovatelné. V některých případech lze napsat několik prvků množiny a nechat na čtenáři, aby sám uhádl, které další prvky v ní budou ležet. Např. je asi jasné, že množina

$$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

bude obsahovat právě všechna sudá přirozená čísla. Někdy ani tento způsob zadání nestačí – budeme množiny zadávat pomocí výrokové funkce: jako množinu prvků mající společnou určitou vlastnost. Je-li X množina a $V(x)$ je výroková funkce s proměnnou nabývající prvky z množiny X, pak definujeme množinu

$$\{x \in X \; ; \; V(x)\}$$

jako *množinu všech prvků z X mající vlastnost V*. Poznamenejme, že jde o podmnožinu množiny X.

Poznámka 1.29 Uvažujme množinu $A \subset X$ a výrokovou funkci $V(x)$ s proměnnou probíhající množinu X. Často budeme chtít říct, že prvky množiny A mají vlastnost V. Příslušná formule predikátové logiky by pak vypadala takto:

$$\forall x \; : \; x \in A \Rightarrow V(x).$$

Místo toho budeme přehledněji psát

$$\forall x \in A \; : \; V(x)$$

(a číst: „pro každé x z A platí $V(x)$“). Podobně, budeme chtít někdy říct, že všechny prvky z množiny A mající nějakou dodatečnou vlastnost W mají také vlastnost V, tedy

$$\forall x \in A \; : \; W(x) \Rightarrow V(x).$$

Místo toho budeme psát:

$$\forall x \in A, \; W(x) \; : \; V(x)$$

(a číst: „pro každé x z A splňující $W(x)$ platí $V(x)$“). Např.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; x > 0 \; : \; x^3 > 0$$

říká, že třetí mocnina každého kladného reálného čísla je kladná. Pokud bude z kontextu jasné o jakou množinu jde, můžeme i tu vynechat. Např. poslední výrok bychom mohli zapsat i takto

$$\forall x > 0 \; : \; x^3 > 0.$$

Podobně budeme používat existenční kvantifikátor. Fakt, že existuje prvek z množiny A mající vlastnost V lze zapsat takto

$$\exists x \; : \; x \in A \wedge V(x).$$

Místo toho budeme přehledněji psát

$$\exists x \in A \; : \; V(x)$$

(a číst: „existuje x z A takové, že platí $V(x)$“). Budeme-li chtít říct, že alespoň jeden prvek z množiny A mající nějakou dodatečnou vlastnost W má také vlastnost V, budeme to psát takto

$$\exists x \in A,\ W(x)\ :\ V(x)$$

(a číst: „existuje A splňující $W(x)$ takové, že platí $V(x)$“). To oceníme např. v definici vlastní limity posloupnosti (o mnoho stran dále), kde formuli

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\ :\ |a_n - a| < \varepsilon$$

budeme číst takto: „Pro každé ε kladné existuje n_0 z $\mathbb{N}$ takové, že pro všechna n z $\mathbb{N}$ taková, že $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$“.

1.3.3 Operace s množinami

Na množinách můžeme definovat různé „operace“: Nechť A, B jsou množiny, které jsou podmnožinou nějaké množiny X, pak množinu

$$A \cap B = \{x \in X\ ;\ x \in A \wedge x \in B\}$$

nazýváme *průnik množin* A a B; množinu

$$A \cup B = \{x \in X\ ;\ x \in A \vee x \in B\}$$

nazýváme *sjednocením množin* A a B; množinu

$$A \setminus B = \{x \in X\ ;\ x \in A \wedge x \notin B\}$$

nazýváme *rozdílem množin* A a B; množinu

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X\ ;\ x \notin A\}$$

nazýváme *doplňkem (komplementem) množiny A v X*.

Jestliže $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že množiny A a B jsou *disjunktní*.

Připomeňme, že užitečnou pomůckou pro chápání operací s množinami jsou Vennovy diagramy (opět lze odkázat na internet).

Cvičení 1.30 Dokažte, že pro každé tři množiny A, B a C platí:

1. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
5. $(A^c)^c = A$,
6. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$,
7. $A \cap A = A \cup A = A$,
8. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$,
9. $A \subset B \Rightarrow (A \cap B = A \wedge A \cup B = B)$,
10. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

Průniky a sjednocení lze uvažovat konečného i nekonečného počtu množin. Platí pak podobné vzorce.

1.4 Relace

Jak jsme si již řekli, množiny představují neuspořádané soubory svých prvků. Jsou-li a a b dva různé prvky či množiny, pak

$$\{a, b\} \quad \text{a} \quad \{b, a\}$$

je tatáž dvouprvková množina obsahující právě prvky a a b. Nyní bychom ale potřebovali „množinu“, jejíž prvky uspořádané jsou. Potřebujeme definovat tzv. *uspořádanou dvojici* – ve které lze rozlišit „první prvek“ a „druhý prvek“.

Jedna z možných definic uspořádané dvojice je následující.

Definice 1.31 Nechť a, b jsou prvky či množiny (ne nutně různé). *Uspořádanou dvojicí* (a, b) rozumíme množinu

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Dá se totiž dokázat následující věta (dokažte!).

Věta 1.32. *Pro každé dva prvky či množiny a, b, c, d platí, že $(a, b) = (c, d)$ právě tehdy, když $a = c$ a současně $b = d$.*

Lze jen konstatovat, že vlastně ani nezáleží na tom, jak je uspořádaná dvojice definovaná. Pro nás je klíčová právě její vlastnost uvedená ve Větě 1.32. To je mimochodem častý jev v matematice – není ani tak důležité, co daný objekt je, ale jak se s ním pracuje.

Příklad 1.33 Asi nejznámější uspořádanou dvojicí je souřadnice bodu v rovině, se kterou se můžeme setkat v analytické geometrii. V tom případě jde o uspořádanou dvojici reálných čísel. ◯

Poznámka 1.34 V kapitole věnované reálným číslům budeme mluvit o tzv. algebraických strukturách formálně definovaných jako „uspo-řádané dvojice/trojice/čtveřice/...“. Tyto „uspořádané n-tice“ zde již definovat nebudeme. Spokojme se s tvrzením, že uspořádané trojice budou opět charakterizovány tou vlastností, že dvě uspořádané trojice jsou si rovny právě tehdy, když mají stejný první prvek, druhý prvek a třetí prvek.

Vybaveni pojmem uspořádané dvojice se můžeme pustit do definování celé řady dalších pojmů.

Definice 1.35 Nechť A a B jsou neprázdné množiny.

- Množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$ nazýváme *kartézský součin množin A a B*; značíme $A \times B$.
- Každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$ nazýváme *relací mezi množinami A a B*.
- Je-li R relace mezi A a B a $a \in A$, $b \in B$, pak místo „$(a, b) \in R$" píšeme
$$aRb$$
a říkáme, že *prvek a je v relaci R s prvkem b*.
- Kartézký součin $A \times A$ nazýváme *druhou kartézskou mocninou množiny A* a zapisujeme A^2.
- Relaci $R \subset A^2$ nazýváme *(binární) relací na množině A*.

Příklad 1.36 Nechť
$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}.$$
Pak
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\},$$
$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$
Definujme relaci $R \subset A \times B$ takto
$$R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\},$$
a relaci $\leq \subset A^2$ (ano, není to překlep, skutečně množinu značíme tímto znakem – za chvíli uvidíme proč) takto
$$\leq = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$
Pak platí např. $1Ra$, $3Rb$, $1 \leq 1$, $2 \leq 3$, apod. ○

1.5 Uspořádaná množina

Jak již bylo několikrát zdůrazněno, prvky v množině žádné uspořádání nemají. Pokud chceme mezi těmito prvky nějaké uspořádání zavést, provedeme to pomocí jisté speciální binární relace na této množině.

Definice 1.37 Nechť A je neprázdná množina. Řekneme, že binární relace $\leq$ na A je *uspořádání na* A, jestliže platí

(i) $\forall x \in A : \ x \leq x$ (reflexivita),

(ii) $\forall x, y \in A : \ (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisymetrie),

(iii) $\forall x, y, z \in A : \ (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita).

Uspořádanou dvojici $(A, \leq)$ pak nazýváme *uspořádanou množinou*. Je-li navíc uspořádání úplné, tzn. platí

(iv) $\forall x, y \in A : \ x \leq y \vee y \leq x$ (úplnost),

pak říkáme, že uspořádaná množina $(A, \leq)$ je *úplně uspořádaná množina*.

Poznámka 1.38 V Definici 1.37 jsme definovali uspořádanou množinu jako „uspořádanou dvojici“, kde prvním prvkem byla množina a druhým prvkem je relace uspořádání na této množině. To je typický matematický formalizmus, pomocí kterého se má dát najevo, že jsme prvky množiny A „uspořádali“ pomocí relace $\leq$. Totiž, na dané množině můžeme uvažovat víc než jedno uspořádání. Proto je potřeba jasně říct, které uspořádání máme na mysli. Často budeme v souvislosti s danou množinou pracovat s jediným uspořádáním – pak netřeba zdůrazňovat toto uspořádání. V souvislosti s množinou všech reálných čísel budeme vždy uvažovat jediné uspořádání – právě to, které známe již ze základní školy.

Příklad 1.39 Relace $\leq$ na množině A z Příkladu 1.36 je úplné uspořádání. ○

Na uspořádané množině definujeme další pomocné relace:

Definice 1.40 Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Pak na A definujeme relace $<$, $\geq$ a $>$, a to takto: $\forall x, y \in A$:

- $x < y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y,$
- $x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x,$
- $x > y \quad \Leftrightarrow \quad x \geq y \wedge x \neq y.$

Poznámka 1.41 Poznamenejme, že relace $\geq$ je také relací uspořádání na A (ověřte!). Naproti tomu relace $<$ a $>$ nejsou relacemi uspořádání (mají pouze vlastnost tranzitivity) – jsou to ale takzvané relace *ostrého uspořádání* (které v těchto skriptech definovat nepotřebujeme).

Definice 1.42 Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, $B \subset A$. Prvek $y \in B$ nazveme *největším prvkem množiny* B, jestliže

$$\forall x \in B : \ x \leq y.$$

Podobně, prvek $y \in B$ nazveme *nejmenším prvkem množiny* B, jestliže

$$\forall x \in B : \ x \geq y.$$

Definice 1.43 Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, $B \subset A$. Prvek $y \in A$ nazveme *horní závorou množiny* B, jestliže
$$\forall x \in B \,:\, x \leq y.$$
Podobně, prvek $y \in A$ nazveme *dolní závorou množiny* B, jestliže
$$\forall x \in B \,:\, x \geq y.$$

Poznámka 1.44 Při rychlém srovnání pojmů nejmenšího prvku množiny a dolní závory (a podobně největšího prvku a horní závory) se mohou zdát tyto pojmy stejné. Stejné nejsou. Liší se pouze v jediném ale podstatném detailu. Zatímco nejmenší prvek množiny B je *vždy* jejím prvkem, dolní závora této množiny do ní obecně nemusí patřit. Z definice plyne, že nejmenší prvek množiny je současně její dolní závorou a podobně největší prvek je její horní závorou (opačná implikace neplatí).

Definice 1.45 Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Množinu $B \subset A$ nazýváme *ohraničenou shora (resp. zdola)*, existuje-li její horní (resp. dolní) závora. Množinu $B \subset A$ nazveme ohraničenou, je-li ohraničená zdola i shora. Přitom místo slova „ohraničená" lze říkat „omezená"

Definice 1.46 Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, $B \subset A$. Existuje-li nejmenší horní závora množiny B (přesně: nejmenší prvek množiny všech horních závor množiny B), nazýváme ji *supremem množiny* B a značíme $\sup B$. Podobně, existuje-li největší dolní závora množiny B, nazýváme ji *infimem množiny* B a značíme $\inf B$.

Více se budeme bavit o dolních a horních závorách, infimech a supremech množin až v souvislosti s množinou reálných čísel, tj. v kapitole 2. Tam si také tyto pojmy budeme ilustrovat na příkladech.

Poznámka 1.47 Na závěr zmiňme jeden užitečný pojem týkající se uspořádání. Úplně uspořádanou množinu $(A, \leq)$ nazveme *dobře uspořádanou*, jestliže každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek. Příkladem dobře uspořádané množiny je množina přirozených čísel (společně se známým uspořádáním ze základní školy). Snadno se dá dokázat, že každá shora ohraničená podmnožina dobře uspořádané množiny má supremum (stačí uvažovat množinu všech horních závor takové množiny – v dobře uspořádané množině pak tato množina má vždy nejmenší prvek).

1.6 Zobrazení

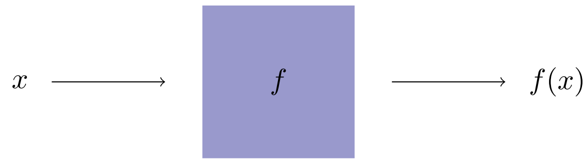
Nyní se dostáváme k další ze stěžejních definic. Pojem *zobrazení* je společným základem pojmů posloupnosti a reálné funkce reálné proměnné, které budou předmětem převážné části tohoto skripta.

Definice 1.48 Nechť A, B, C jsou neprázdné množiny, $C \subset A$. *Zobrazením f z množiny A do množiny B* rozumíme *pravidlo*, které každému $x \in C$ přiřadí právě jedno $y \in B$; píšeme $f : A \to B$.

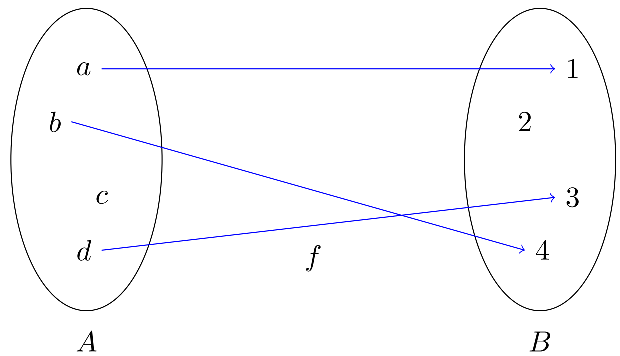
- Množině C říkáme *definiční obor zobrazení f* a dále budeme značit výhradně jako $\mathcal{D}(f)$.
- Prvku $y \in B$, který je pravidlem f přiřazen prvku $x \in \mathcal{D}(f)$ říkáme *funkční hodnota zobrazení f v bodě x* (nebo *obraz prvku x v zobrazení f*) a značíme $f(x)$. Naopak prvku x říkáme *vzor prvku y v zobrazení f*.
- Množině
$$\mathcal{H}(f) = \{f(x) \; ; \; x \in \mathcal{D}(f)\} = \{y \in B \; ; \; \exists x \in \mathcal{D}(f) \; : \; y = f(x)\}$$
říkáme *obor hodnot zobrazení f*.
- Pro každou neprázdnou množinu $M \subset \mathcal{D}(f)$ definujeme množinu
$$f(M) = \{f(x) \; ; \; x \in M\} = \{y \in B \; ; \; \exists x \in M \; : \; y = f(x)\}$$
a nazýváme ji *obrazem množiny M v zobrazení f*.
- Chceme-li zdůraznit fakt, že $\mathcal{D}(f) = A$ a $\mathcal{H}(f) \neq B$, říkáme, že f je *zobrazení množiny A **do** množiny B*.
- Chceme-li zdůraznit fakt, že $\mathcal{D}(f) \neq A$ a $\mathcal{H}(f) = B$, říkáme, že f je *zobrazení **z** množiny A **na** množinu B*.
- Chceme-li zdůraznit fakt, že $\mathcal{D}(f) = A$ a $\mathcal{H}(f) = B$, říkáme, že f je *zobrazení množiny A **na** množinu B*.

Příklad 1.49 Uvažujme dvě množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Definujme zobrazení $f : A \to B$ takové, že
$$f(a) = 1, \quad f(b) = 4, \quad f(d) = 3.$$
Zřejmě pak
$$\mathcal{D}(f) = \{a, b, d\}, \quad \mathcal{H}(f) = \{1, 4, 3\}.$$
Prvek a je vzorem prvku 1 v zobrazení f, b je vzorem 4 v zobrazení f, d je vzorem 3 v zobrazení f; a naopak prvek 1 je obrazem prvku a v zobrazení f, 4 je obrazem b v zobrazení f, 3 je obrazem d v zobrazení f. Označíme-li $M = \{a, b\}$, pak $f(M) = \{1, 4\}$. ○

Poznámka 1.50 Pojem zobrazení si lze představovat jako jakousi černou skříňku, do které něco vložíme (prvek z jejího definičního oboru) a ono z ní na oplátku něco vypadne (příslušná funkční hodnota) – viz Obrázek 1.1. Pro snazší pochopení dalších pojmů bývá také užitečný *diagram zobrazení*. Např. zobrazení f z Příkladu 1.49 lze přehledně zobrazit načrtnutím množin A, B, přitom prvky těchto množin jsou spojeny šipkami vyjadřujícími vzory a obrazy zobrazení, viz Obrázek 1.2. Vzhledem k definici zobrazení *nemůže z nějakého prvku množiny A vycházet více jak jedna šipka*! Nešlo by pak o zobrazení.



Obrázek 1.1: Představa zobrazení jakožto černé skříňky.



Obrázek 1.2: Diagram zobrazení f z Příkladu 1.49.

Definice 1.51 Nechť $f : A \to B$. *Grafem zobrazení* f rozumíme množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, f(x)) \; ; \; x \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Poznámka 1.52 Zřejmě

$$\operatorname{graf} f \subset \mathcal{D}(f) \times \mathcal{H}(f) \subset A \times B,$$

tzn. graf funkce f je *relace mezi množinami A a B*. Je důležité zmínit, že v modernějším pojetí je zobrazení definováno právě jako tato relace (nicméně významově je pojem zobrazení bližší právě tomu „přiřazování něčeho něčemu“). Grafem zobrazení se v tom případě pak rozumí jen „grafické znázornění“ relace, tzn. dvě na sebe kolmé osy reprezentující množinu A a množinu B a množinu bodů jejichž souřadnice patří do relace – tedy tak, jak graf zobrazení budeme kreslit. *Zobrazení je svým grafem jednoznačně určeno*, tzn. známe-li graf, známe zobrazení a naopak. Není tedy podstatné, kterou z definic zobrazení budeme používat.

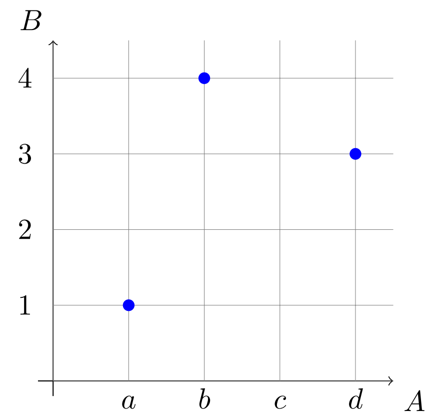
Příklad 1.53 Graf zobrazení f z Příkladu 1.49 je načrtnut na Obrázku 1.3. Puntíky v tomto obrázku pak odpovídají šipkám v diagramu zobrazení (Obrázek 1.2). ○

Poznámka 1.54 (o rovnosti zobrazení) Je možné definovat vztah rovnosti mezi zobrazeními mezi dvěma množinami. Dvě zobrazení $f, g : A \to B$ *jsou si rovna* právě tehdy, když

- $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$,
- $\forall x \in \mathcal{D}(f) \; : \; f(x) = g(x)$.

Z jednoznačného vztahu mezi zobrazením a jeho grafem také plyne, že dvě zobrazení jsou stejná právě tehdy, když jsou stejné jejich grafy.

Následující pojmy složeného zobrazení, prostého, „zobrazení na“ a inverzního zobrazení budou potřeba zejména v kapitole o reálných funkcích.



Obrázek 1.3: Graf zobrazení f z Příkladu 1.49.

Definice 1.55 Nechť A, B, C jsou neprázdné množiny, $f : A \to B$, $g : B \to C$ a platí, že množina

$$M = \{x \in \mathcal{D}(f) \ ; \ f(x) \in \mathcal{D}(g)\}$$

je neprázdná. Pak zobrazení z A do C, přiřazující každému $x \in M \subset A$ prvek $g(f(x))$ nazýváme *složením zobrazení* f *a* g a značíme ho $g \circ f$. Přitom f říkáme *vnitřní složka* a g *vnější složka složeného zobrazení.*

Poznámka 1.56 Funkční hodnota prvku $x \in M$ složeného zobrazení $g \circ f$ se vypočítá tak, že se vypočítá nejprve $f(x)$, která se následně dosadí do funkce g.

Definice 1.57 Nechť $f : A \to B$. Řekneme, že zobrazení f je

(a) *injektivní (prosté)*, jestliže

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f) \ : \ f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y,$$

(b) *surjektivní (na)*, jestliže

$$\forall y \in B \ \exists x \in \mathcal{D}(f) \ : \ y = f(x),$$

(c) *bijektivní (vzájemně jednoznačné)*, jestliže $\mathcal{D}(f) = A$ a f je injektivní a surjektivní.

Poznámka 1.58 Pojmy z Definice 1.57 lze velmi dobře charakterizovat pomocí diagramu zobrazení, a to takto

- injektivní zobrazení: žádné dvě šipky neukazují na tentýž prvek množiny B,
- surjektivní zobrazení: na každý prvek z množiny B ukazuje alespoň jedna šipka,
- bijektivní zobrazení: platí obě předchozí pravidla a navíc *z každého* prvku z množiny A ukazuje šipka na nějaký prvek z množiny B.

Příklad 1.59 Uvažujme dvě množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Definujme zobrazení $g : A \to B$ tak, že

$$g(a) = 1, \quad g(b) = 4, \quad g(c) = 2, \quad g(d) = 3.$$

Očividně se jedná o bijektivní zobrazení množiny A na množinu B. Je také vidět, že obě množiny A a B mají stejný počet prvků. Není to náhoda. Bijektivních zobrazení se dokonce používá k porovnávání „velikosti“ nekonečných množin. ◯

Velkou důležitost mají pro nás prostá zobrazení. Diagram prostého zobrazení vypadá tak, že žádné dvě *různé* šipky ukazující z množiny A směrem do množiny B neukazují na stejný prvek. Nabízí se tak možnost, otočit směr těchto šipek. Tyto opačné šipky každému obrazu původního zobrazení jednoznačně přiřazují jeho vzor. O tomto novém zobrazení říkáme, že je *inverzní* k původnímu zobrazení.

Definice 1.60 Nechť $f : A \to B$ je prosté zobrazení. Pak *inverzním zobrazením k* f nazýváme zobrazení $f^{-1} : B \to A$ takové, které každému $y \in \mathcal{H}(f)$ přiřazuje $x \in \mathcal{D}(f)$ splňující $f(x) = y$.

Poznámka 1.61 Uvažujme prosté zobrazení $f : A \to B$.

(i) Inverzní zobrazení lze definovat pouze k prostému zobrazení. V opačném případě by totiž k některým $y \in \mathcal{H}(f)$ nebyla jednoznačně přiřazena jeho hodnota.

(ii) Z definice přímo vyplývá, že $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$.

(iii) Z definice plyne, že

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \ : \ f^{-1}(f(x)) = x \quad a \quad \forall y \in \mathcal{H}(f) \ : \ f(f^{-1}(y)) = y.$$

V souvislosti se zobrazením zmiňme pojem *restrikce* zobrazení.

Definice 1.62 Nechť $f : A \to B$, $M \subset \mathcal{D}(f)$. Zobrazení $g : A \to B$ mající definiční obor roven M a definované předpisem

$$\forall x \in M \ : \ g(x) = f(x),$$

nazveme *zúžením (restrikcí) zobrazení* f *na množinu* M, značíme ji $f|_M$.

Příklad 1.63 Uvažujme množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ a zobrazení $f : A \to B$ definované takto:

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 3, \quad f(d) = 4.$$

Položme $M = \{a, b, d\}$. Pak funkce $f|_M : A \to B$ je definovaná takto:

$$f|_M(a) = 1, \quad f|_M(b) = 3, \quad f|_M(d) = 4.$$

Všimněme si, že ačkoliv f prostá nebyla, její restrikce $f|_M$ již prostá je. Restrikci zobrazení použijeme při definování funkce arcsin (protože sin není prostá, ale její restrikce na vhodnou množinu již je). ◯

V kapitole o reálných číslech se budeme bavit o aritmetických operacích sčítání a násobení, o kterých víme již od základní školy. Nyní je ovšem budeme schopni pořádně zadefinovat. K tomu nám poslouží pojem *binární operace*, což je jen speciální případ zobrazení.

Definice 1.64 Nechť A je neprázdná množina. Pak zobrazení $*$ množiny A^2 do množiny A nazýváme *binární operací na množině* A. Funkční hodnoty pak bývá zvykem psát místo $*((a,b))$ jako $a * b$, kde $a, b \in A$.

Poznámka 1.65 Binární operace je tedy zobrazení přiřazující každé uspořádané dvojici prvků z množiny A prvek této množiny. Uvažujeme-li množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$, pak operace sčítání $+$ je definováno jako zobrazení přiřazující každé dvojici přirozených čísel jedno přesně definované přirozené číslo, např. $+((1,2)) = 3$, $+((5,7)) = 12$, atp. Místo méně přehledného $+((1,2)) = 3$ budeme raději psát $1 + 2 = 3$.

1.7 Důkaz matematikou indukcí

Nyní si představíme velmi jednoduchý a efektivní nástroj k dokazování vět ve tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ V(n),$$

kde $V(n)$ je výroková funkce s proměnnou n probíhající všechna přirozená čísla. Třeba lze tímto způsobem dokázat větu

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kdybychom neměli k dispozici princip matematické indukce, museli bychom dokazovat takový výrok přímo, což nemusí být nijak jednoduchá záležitost. V rukávu bychom museli mít často různé chytré triky. Důkaz matematickou indukcí nás toho ušetří. Tento princip je založen na následující větě.

Věta 1.66 (princip matematické indukce)**.** *Nechť $V(n)$ je výroková funkce, $n \in \mathbb{N}$. Jestliže*

- *platí $V(1)$ a*
- *pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$,*

pak je výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ V(n)$$

pravdivý.

Pro větší přehlednost je důkaz této důležité věty uveden zde, nicméně potřebný pojem induktivní množiny bude zaveden až v souvislosti s definicí množiny reálných čísel a jejích podmnožin (viz Definici 2.14).

Důkaz. Definujme množinu

$$M = \{n \in \mathbb{N} \, ; \, V(n)\}.$$

Zřejmě $M \subset \mathbb{N}$. Podle předpokladů věty pak

- $1 \in M$ a
- pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí implikace $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$.

Množina M je tedy induktivní. Protože množina všech přirozených čísel je průnik *všech* induktivních množin, platí $\mathbb{N} \subset M$. Tím je dokázáno, že $M = \mathbb{N}$, tzn. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je výrok $V(n)$ pravdivý. Podle pravidla generalizace obecného výroku plyne také pravdivost výroku $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$. □

Důkaz matematickou indukcí se skládá ze dvou částí:

- Krok 1 : Dokážeme platnost výroku $V(1)$. To bývá většinou velmi snadné – často jde jen o dosazení do nějaké rovnosti či nerovnosti a porovnání hodnot na obou stranách.
- Krok 2 (tzv. indukční): Máme dokázat pravdivost obecného výroku

  $$\forall n \in \mathbb{N} : V(n) \Rightarrow V(n+1).$$

  Na první pohled jde o složitější výrok než ten, který máme vlastně dokazovat – ale zdání klame. Indukční krok tedy začneme větou „Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné“. Po zbytek důkazu symbol n budeme považovat za pevně zvolené přirozené číslo (viz (I)(a) v sekci Matematické důkazy a jejich struktura). Zbývá dokázat výrok $V(n) \Rightarrow V(n+1)$. Důkaz pravdivosti této implikace opět provedeme pomocí (III) z právě zmíněné sekce Matematické důkazy a jejich struktura. Předpokládáme, že platí výrok $V(n)$ (říká se mu *indukční předpoklad*) a snažíme se dokázat pravdivost výroku $V(n+1)$. A toto je právě výhoda, kterou má důkaz matematickou indukcí proti přímému důkazu. Místo nějakého triku nebo chytrého pozorování stačí vyjít z pravdivosti $V(n)$ a snažit se dokázat pravdivost $V(n+1)$.

Příklad 1.67 Dokažte pravdivost výroku

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Řešení. Výrok je zřejmě ve požadovaném tvaru, stačí vzít za výrokovou funkci $V(n)$ rovnost

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

kde n probíhá množinu přirozených čísel. První krok je jednoduchý, protože $V(1)$ je rovnost

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

která, jak se snadno přesvědčíme, opravdu platí. Proveďme nyní indukční krok. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ libovolně ale pevně. Předpokládejme, že platí $V(n)$, tzn. platí rovnost

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dokažme $V(n+1)$, tzn. rovnost

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ujasnili jsme si tedy předpoklady a cíle, můžeme se pustit do důkazu implikace. Platí

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

kde první rovnost plyne z indukčního předpokladu, v druhé rovnosti jsme vytkli člen $n+1$ a v poslední rovnosti šlo pouze o estetickou úpravu do požadovaného tvaru. Tím je tedy dokázána implikace. Protože $n \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, platí výrok $\forall n \in \mathbb{N} : V(n) \Rightarrow V(n+1)$. Podle principu matematické indukce jsme dokázali výrok $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$. ◯

Cvičení 1.68 Dokažte matematickou indukcí pravdivost výroku:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Cvičení 1.69 Dokažte matematickou indukcí, že pro každá dvě reálná čísla a a b platí

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n).$$

Příklad 1.70 Dokažte

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ (2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

Řešení. Nechť $n=1$. Pak jistě platí

$$(2\cdot 1)! = 2 < 4 = 2^{2\cdot 1}(1!)^2.$$

Nyní přejdeme k indukčnímu kroku. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ libovolně. Předpokládáme pravdivost nerovnosti

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$$

a máme dokázat, že platí

$$(2(n+1))! < 2^{2(n+1)}((n+1)!)^2. \tag{1.1}$$

Platí tedy

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! < (2n+2)(2n+1)2^{2n}(n!)^2,$$

kde jsme v nerovnosti použili indukční předpoklad. Oproti příkladu na důkaz rovnosti zde nyní provedeme následující úvahu. Kdyby se nám podařilo dokázat, že platí nerovnost

$$(2n+2)(2n+1)2^{2n}(n!)^2 < 2^{2(n+1)}((n+1)!)^2, \tag{1.2}$$

pak by díky tranzitivitě nerovnosti (tj. $a<b$ a $b<c$ implikuje $a<c$) platilo také (1.1), a tím by byl indukční krok hotov. Dokažme tedy pravdivost (1.2) (připomeňme, že n je stále pevně zvolené přirozené číslo), a to pomocí ekvivalentních úprav. Po vykrácení této rovnosti kladnými čísly 2^{2n} a $(n!)^2$ dostáváme nerovnost

$$(2n+2)(2n+1) < 4(n+1)^2,$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$4n^2+6n+2 < 4n^2+8n+4.$$

Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností $0 < 2n+2$, která zřejmě platí (nezapomeňme, že $n \in \mathbb{N}$). ◯

Některé (ne)rovnosti neplatí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ ale až od jistého přirozeného čísla. S tím ale není žádný problém. Platí následující věta.

Věta 1.71 (princip matematické indukce II.). *Nechť* $n_0 \in \mathbb{N}$, $V(n)$ *je výroková funkce, kde* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. *Jestliže*

- *platí* $V(n_0)$ *a*
- *pro každé* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *platí implikace* $V(n) \Rightarrow V(n+1)$,

pak je výrok $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : V(n)$ *pravdivý.*

Příklad 1.72 Dokažte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \ : \ 2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n.$$

Řešení. Ověřme, že pro $n = 2$ je nerovnost splněna. Vskutku platí

$$2! \cdot 4! = 48 > 36 = 6^2 = [(2+1)!]^2.$$

Přejděme k indukčnímu kroku. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ je libovolný. Za indukčního předpokladu

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n$$

dokažme

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)!(2(n+1))! > [(n+1+1)!]^{n+1}.$$

Podle předpokladu platí

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)!(2(n+1))! > [(n+1)!]^n (2(n+1))!.$$

Kdyby se nám podařilo dokázat také nerovnost

$$[(n+1)!]^n (2(n+1))! > [(n+1+1)!]^{n+1},$$

důkaz by vzhledem k tranzitivitě nerovnosti byl hotov. Dokažme tuto nerovnost. Po ekvivalentních úpravách se dostáváme k nerovnosti

$$(2n+2)! > (n+2)^{n+1}(n+1)!.$$

Po podělení obou stran této nerovnosti výrazem $(n+1)!$ dostáváme nerovnost

$$(2n+2)(2n+1)(2n) \cdots (n+2) > (n+2)^{n+1}$$

a konečně po podělení výrazem na pravé straně přicházíme k nerovnosti

$$\frac{2n+2}{n+2} \frac{2n+1}{n+2} \frac{2n}{n+2} \cdots \frac{n+3}{n+2} > 1.$$

Platí poslední nerovnost? Platí. Na levé straně máme součin čísel větších než 1. ○

Nyní už stačí počítat příklady, např. ty ze sbírek [5, 9].

Kapitola 2

Reálná čísla

Pojem reálného čísla je pro matematickou analýzu zásadní – budeme s reálnými čísly pracovat téměř pořád. S reálnými čísly se setkáváme už od základní školy a pracujeme s nimi více či méně intuitivně. Úkolem hodin matematiky na střední škole bývá zejména osvojení základních dovedností manipulace s reálnými čísly – tzv. úpravy algebraických výrazů. To je často prováděno bez vysvětlení. Existuje spousta vzorečků, které si středoškolák musí zapamatovat.

V souvislosti s reálnými čísly se nabízejí tyto otázky:

- Co jsou reálná čísla?
- Potřebujeme vůbec reálná čísla? Obejdeme se bez nich?
- Jak si reálná čísla představovat?
- Jak jsou reálná čísla definována?
- Odkud se berou všechny ty vzorečky, co se učí na střední škole?

Postupně si zde, alespoň částečně, odpovězme na položené otázky.

Reálná čísla jsou matematické objekty, které se používají pro vyjadřování množství, délek, obsahů, objemů atd. Jejich nedílnou součástí jsou ale také nad nimi definované operace jako např. sčítání, násobení, apod.

Jak za chvíli uvidíme, definovat reálná čísla dá docela práci. Proto se může vtírat otázka, zda to vůbec stojí za to. Nestačí jen přirozená čísla, pomocí kterých můžeme vyjadřovat množství vzájemně rozlišitelných objektů? Ne, je potřeba pracovat i s necelými částmi celků, která je možno popsat racionálními čísly (např. jak spravedlivě rozdělit dvě jablka mezi tři osoby). Nestačí tedy jen racionální čísla? Také ne, i když v minulosti panovalo přesvědčení, že ano. Racionální čísla nám opravdu nestačí, stačí zmínit geometrii, kde chceme umět měřit délky úseček. Chceme-li určit délku úhlopříčky čtverce o délce strany 1, docházíme pomocí Pythagorovy věty k závěru, že je to číslo, jehož druhá mocnina je číslo 2. Dá se ovšem relativně jednoduše ukázat, že takové číslo není racionální. Proto je potřeba kromě racionálních čísel uvažovat tzv. čísla iracionální. Tímto rozšířením dostáváme množinu reálných čísel.

Množinu všech reálných čísel si lze poměrně snadno představit, a to jako přímku. Tedy její body reprezentují jednotlivá reálná čísla. Této přímce se také říká *reálná osa* – o tom více ve stejnojmenné sekci. Jak se vyvíjela představa o reálných číslech se lze třeba dozvědět v zajímavém článku [12].

A jak reálná čísla definujeme? Existuje několik přístupů. My zvolíme axiomatický přístup. Množinu všech reálných čísel budeme definovat jako jistou *algebraickou strukturu*, konkrétně jako množinu (nijak na začátku specifikovanou) o alespoň dvou prvcích, vybavenou dvěma binárními operacemi (sčítání a násobení), jednou relací uspořádání takovou, že tyto operace a relace mají jisté vlastnosti a jsou v nějakém vztahu – ty budou určené jistými výroky tzv. *axiomy*. Těchto axiomů bude celkem 16.

Nyní můžeme odpovědět i na poslední otázku. Všechny vzorečky týkající se reálných čísel se dají odvodit právě z těchto 16 axiomů! A co víc, toto odvození dokonce bude v našich silách.

2.1 Definice a základní vlastnosti

Než se dostaneme k samotným reálným číslům, představme si některé algebraické pojmy, bez kterých se neobejdeme. Začněme s definicí *komutativního tělesa* neboli *pole*.

Definice 2.1 Nechť $\mathbb{T}$ je množina obsahující alespoň dva různé prvky, označme je 0 a 1, $+$ a $\cdot$ jsou dvě binární operace na $\mathbb{T}$. Uspořádanou pětici $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1)$ nazýváme *polem*, platí-li:

Axiom 1: $\forall a, b \in \mathbb{T} \,:\, a + b = b + a$ (komutativita sčítání),

Axiom 2: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} \,:\, (a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání),

Axiom 3: $\forall a \in \mathbb{T} \,:\, a + 0 = a$ (0 je „nulový prvek“),

Axiom 4: $\forall a \in \mathbb{T}\ \exists b \in \mathbb{T} \,:\, a + b = 0$ (ke každému prvku existuje „opačný prvek“),

Axiom 5: $\forall a, b \in \mathbb{T} \,:\, a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení),

Axiom 6: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} \,:\, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativita násobení),

Axiom 7: $\forall a \in \mathbb{T} \,:\, a \cdot 1 = a$ (1 je „jednotkový prvek“),

Axiom 8: $\forall a \in \mathbb{T}, a \neq 0\ \exists b \in \mathbb{T} \,:\, a \cdot b = 1$
(ke každému nenulovému prvku existuje „inverzní prvek“),

Axiom 9: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} \,:\, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
(distributivita – dává do souvislosti operace sčítání a násobení).

Prvku 0 říkáme *nula*, prvku 1 říkáme jedna, operaci $+$ říkáme *sčítání* a operaci $\cdot$ říkáme *násobení*. Pro každé $a, b \in \mathbb{T}$ nazýváme prvky $a+b$ a $a \cdot b$ po řadě *součtem a součinem prvků a a b*.

Ještě dodejme, že často místo $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1)$ budeme psát jen $\mathbb{T}$ – je to kratší. Tuto zkratku budeme používat i pro další algebraické struktury.

Poznámka 2.2

- Dále budeme používat stejné priority provádění operací, jak jsme zvyklí ze střední školy. To nám zjednoduší zápis výrazů, ve kterých bychom v opačném případě museli psát spoustu závorek – bylo by to značně nepřehledné. Násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním. Tedy např. v axiomu 9 se vyskytuje výraz $a \cdot b + a \cdot c$, který chápeme takto

$$(a \cdot b) + (a \cdot c),$$

tzn. nejprve provedeme naznačené operace násobení a jejich výsledky sečteme.

- Bývá zvykem, že se symbol tečky pro násobení vynechává, tzn. místo $a \cdot b$ se píše pouze ab. Druhý způsob je zřejmě úspornější, pomocí prvního způsobu zase můžeme zdůraznit, že jde o násobení. Budeme používat oba způsoby zápisu – jak se to bude hodit.

Příklad 2.3 Dokažte, že v poli $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1)$ platí následující

1. $\forall a, c \in \mathbb{T} \,:\, a + c = a \Rightarrow c = 0,$
2. $\forall a, c \in \mathbb{T}, a \neq 0 \,:\, ac = a \Rightarrow c = 1.$

Řešení. ad 1: Zvolme $a, c \in \mathbb{T}$ taková, že platí $a + c = a$. Podle axiomu 4 (a použitím pravidla specializace obecného i existenčního výroku – viz Kapitolu 1, které se bere samo sebou, takže to již znovu zmiňovat nebudeme) existuje $b \in \mathbb{T}$ takové, že $a + b = 0$. Pak platí

$$c = c + 0 = c + (a + b) = (c + a) + b = (a + c) + b = a + b = 0,$$

kde jsme postupně využili axiomu 3, rovnosti $a + b = 0$, axiomu 2, axiomu 1, předpokladu $a + c = a$ a konečně znovu rovnosti $a + b = 0$.
ad 2: Provedeme podobně – tak, že použijeme analogické axiomy týkající se násobení. ◯

Poznámka 2.4 Dokazované výroky z Příkladu 2.3 dohromady s axiomy 3 a 7 říkají, že 0, resp. 1, jsou jediné dva prvky z $\mathbb{T}$, pro něž platí tyto dva axiomy.

Cvičení 2.5 Dokažte, že v poli $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1)$ platí následující

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{T} \,:\, a + b = 0 = a + c \;\Rightarrow\; b = c,$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{T}, a \neq 0 \,:\, ac = 1 = bc \;\Rightarrow\; b = c.$

Poznámka 2.6 Podle axiomu 4 ke každému prvku a existuje *alespoň jeden* tzv. opačný prvek – ten je daný tím, že jeho součet s prvkem a je roven nule. Podle Cvičení 2.5(1) ke každému prvku existuje *nejvýše jeden* opačný prvek. Dohromady tedy dostáváme, že ke každému a existuje *právě jeden* opačný prvek; budeme ho značit $-a$, tzn. platí $a + (-a) = 0$. Z komutativity sčítání samozřejmě plyne, že také $(-a) + a = 0$. Nyní můžeme definovat *odčítání* prvků pole, a to takto: pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{T}$ definujeme *rozdíl prvků a a b (v tomto pořadí)* jako

$$a - b = a + (-b).$$

Podobně je to s dělením. Nejprve si uvědomme, že podle axiomu 8 ke každému nenulovému $a \in \mathbb{T}$ existuje *alespoň jeden* tzv. inverzní prvek – ten je daný tím, že jeho součin s prvkem a je roven 1. Ze Cvičení 2.5(2) plyne, že takový prvek je *nejvýše jeden*. Dohromady tedy dostáváme, že ke každému $a \neq 0$ existuje *právě jeden* inverzní prvek; budeme ho značit a^{-1}, tzn. platí $a \cdot a^{-1} = 1$. Z komutativity násobení samozřejmě plyne, že také $a^{-1} \cdot a = 1$. Nyní můžeme definovat *dělení* prvků pole, a to takto: pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{T}$, $b \neq 0$ definujeme *podíl prvků a a b (v tomto pořadí)* jako

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Z praktických důvodů ho budeme značit také výrazem a/b.

Cvičení 2.7 Dokažte, že v poli $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1)$ pro všechna $x, y, z \in \mathbb{T}$ platí

1. $x + y = x + z \Rightarrow y = z$,
2. $(x \neq 0 \wedge xy = xz) \Rightarrow y = z$,
3. $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
4. $0 \cdot x = 0$,
5. $-0 = 0$,
6. $-(-x) = x$,
7. $x(-y) = -(xy) = (-x)y$,
8. $(-1)x = -x$,
9. $x(y - z) = xy - xz$,
10. $-(x + y) = -x - y$,
11. $-(x - y) = -x + y$,
12. $x \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x} = 1$,
13. $\dfrac{x}{1} = x$,
14. $(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow xy \neq 0$,
15. $(y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge w \neq 0) \Rightarrow \dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{w}{z}} = \dfrac{xw}{yz}$,
16. $(y \neq 0 \wedge z \neq 0) \Rightarrow \dfrac{x}{y} + \dfrac{w}{z} = \dfrac{xz + wy}{yz}$,
17. $x \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \neq 0$,
18. $(y \neq 0 \wedge z \neq 0) \Rightarrow \dfrac{1}{\frac{y}{z}} = \dfrac{z}{y}$,
19. $z \neq 0 \Rightarrow \dfrac{xy}{z} = x\dfrac{y}{z} = xy\dfrac{1}{z}$,
20. $y \neq 0 \Rightarrow \dfrac{-x}{y} = \dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$.

K definici množiny všech reálných čísel budeme potřebovat relaci uspořádání – pole rozšíříme o tuto relaci.

Definice 2.8 Nechť $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1)$ je pole a $\leq$ je relace na $\mathbb{T}$. Uspořádanou šestici $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ nazýváme *uspořádaným polem*, jestliže $(\mathbb{T}, \leq)$ je úplně uspořádaná množina, tzn.

Axiom 10: $\forall a \in \mathbb{T} : a \leq a$ (reflexivita),

Axiom 11: $\forall a, b \in \mathbb{T} : a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ (antisymetrie),

Axiom 12: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (tranzitivita),

Axiom 13: $\forall a, b \in \mathbb{T} : a \leq b \vee b \leq a$ (úplnost)

a navíc platí

Axiom 14: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
(tato vlastnost dává do souvislosti sčítání a uspořádání),

Axiom 15: $\forall a, b, c \in \mathbb{T} : a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
(tato vlastnost dává do souvislosti násobení a uspořádání).

Cvičení 2.9 Nechť $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ je uspořádané pole. Pak pro všechna $x, y, w, z \in \mathbb{T}$ platí

1. $(x \leq y \wedge w \leq z) \Rightarrow x + w \leq y + z$,
2. $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \Rightarrow x + y \geq 0$,
3. $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$,
4. $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$,

5. $x \geq y \Leftrightarrow -x \leq -y$,
6. $(x \geq y \wedge z \leq 0) \Rightarrow xz \leq yz$,
7. $xx \geq 0$,
8. $x \geq y > 0 \Rightarrow 1/x \leq 1/y$,
9. $(x > y \wedge w > z) \Rightarrow x + w > y + z$,
10. $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x + y > 0$,
11. $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,
12. $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$,
13. $x > y \Leftrightarrow -x < -y$,
14. $(x > y \wedge z < 0) \Rightarrow xz < yz$,
15. $x \neq 0 \Leftrightarrow xx > 0$,
16. $-1 < 0 < 1$,
17. $xy > 0 \Leftrightarrow$ $[(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$,
18. $xy < 0 \Leftrightarrow$ $[(x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)]$,
19. $x > 0 \Leftrightarrow 1/x > 0$,
20. $x > y > 0 \Rightarrow 1/x < 1/y$,
21. $x < y \Rightarrow x < (x + y)/2 < y$,

kde relace $\geq$, $<$ a $>$ jsou vytvořeny z relace uspořádání Definicí 1.40.

Lemma 2.10 (trichotomie). *Nechť $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ je uspořádané pole. Pak pro každé x, $y \in \mathbb{T}$ je pravdivý právě jeden z výroků: $x < y$, $x = y$, $x > y$.*

Důkaz. Podle axiomu 13 platí $x \leq y$ nebo $x \geq y$, tzn. platí $x < y$ nebo $x = y$ nebo $x > y$ nebo $x = y$. Dokažme, že se zmíněné tři (navzájem různé) výroky vylučují. Z definice ostré nerovnosti plyne, že nemůže platit současně $x < y$ a $x = y$, stejně jako $x > y$ a $x = y$. Dokažme sporem, že nemůže současně platit $x < y$ a $x > y$. Kdyby to platilo, pak by opět z Definice 1.40 vyplynulo, že $x \leq y$ a $x \geq y$ a $x \neq y$. Z prvních dvou nerovností vzhledem k axiomu 11 pak $x = y$, což je ve sporu s $x \neq y$. □

Na uspořádaném poli lze definovat pojem suprema a infima množiny, viz Definici 1.46. Tento pojem se objevuje v posledním z 16 axiomů reálných čísel.

Definice 2.11 Uspořádané pole $(\mathbb{T}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ nazýváme *úplně uspořádaným polem*, platí-li:

Axiom 16: Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $\mathbb{T}$ má v $\mathbb{T}$ supremum (axiom dedekindovské úplnosti).

Poznámka 2.12 V této sekci jsme se postupně propracovali až ke struktuře *úplně uspořádaného pole*. Abychom konečně mohli zadefinovat množinu všech reálných čísel, je třeba zmínit ještě následující dvě fakta:

- Taková struktura existuje. Lze tedy zkonstruovat množinu $\mathbb{T}$ spolu s binárními operacemi $+$ a $\cdot$ a uspořádáním $\leq$ splňující všech 16 axiomů. Konstrukcí je více a je to docela pracná záležitost – viz např. [3].
- Taková struktura je jediná „až na izomorfismus". Co to přesně znamená? Jsou-li

$$(\mathbb{T}_1, +_1, \cdot_1, 0_1, 1_1, \leq_1) \quad \text{a} \quad (\mathbb{T}_2, +_2, \cdot_2, 0_2, 1_2, \leq_2)$$

dvě různá úplně uspořádaná pole, dá se zkonstruovat bijektivní zobrazení Φ zobrazující $\mathbb{T}_1$ na $\mathbb{T}_2$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{T}_1 \ : \ & \Phi(x +_1 y) = \Phi(x) +_2 \Phi(y), \\ & \Phi(x \cdot_1 y) = \Phi(x) \cdot_2 \Phi(y), \\ & x \leq_1 y \ \Leftrightarrow \ \Phi(x) \leq_2 \Phi(y), \\ \Phi(0_1) = 0_2, \quad & \Phi(1_1) = 1_2 \end{aligned}$$

(přitom takovému zobrazení Φ se říká *izomorfismus* mezi strukturami $\mathbb{T}_1$ a $\mathbb{T}_2$). Řečeno jednoduše, tyto struktury jsou vzájemně zaměnitelné – lze je chápat jako totožné. Poznamenejme, že to není samozřejmé. Za chvíli si nadefinujeme množinu všech racionálních a reálných čísel. Jde o struktury splňující axiomy *uspořádaného pole*, ovšem neexistuje žádná bijekce mezi těmito množinami, natož izomorfismus mezi odpovídajícími strukturami.

Vzhledem k Poznámce 2.12 má následující definice smysl.

Definice 2.13 Úplně uspořádané pole nazýváme *množinou reálných čísel*, značíme $\mathbb{R}$ a jeho prvky nazýváme *reálná čísla.*

2.2 Význačné podmnožiny reálných čísel

Začněme tou nejjednodušší podmnožinou, kterou to vlastně všechno začalo.

Definice 2.14 Množinu $N \subset \mathbb{R}$ nazveme *induktivní*, jestliže platí:

- $1 \in N$,
- je-li $x \in N$, pak $x + 1 \in N$.

Množinu všech přirozených čísel definujeme jako průnik všech induktivních množin, značíme ji $\mathbb{N}$.

Zřejmě pak platí

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots\}.$$

Tyto prvky označujeme symboly 1, 2, 3, 4, … . Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

Další důležitý fakt je, že pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ platí také $a + b \in \mathbb{N}$ a $a \cdot b \in \mathbb{N}$, tzn. součet a součin přirozených čísel je opět přirozené číslo. To již ale neplatí pro odčítání ani pro dělení.

Z uspořádání na $\mathbb{R}$ lze převzít uspořádání na $\mathbb{N}$. Přitom $(\mathbb{N}, \leq)$ je dobře uspořádaná množina, tzn. každá podmnožina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek – viz Poznámku 1.47.

Následující lemma je jednoduchým ale poměrně důležitým základním tvrzením. Dokonce v alternativních definicích reálných čísel zastává funkci axiomu – proto se mu někdy říká *Archimedův axiom.*

Lemma 2.15 (Archimedův „axiom“)**.** *Množina $\mathbb{N}$ je neohraničená shora v $\mathbb{R}$, tzn.*

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : \ n > a.$$

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že $\mathbb{N}$ je ohraničená shora. Podle axiomu 16 má $\mathbb{N}$ supremum, označme $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Protože s je nejmenší horní závora $\mathbb{N}$ a $s-1 < s$, není číslo $s-1$ horní závorou $\mathbb{N}$. Podle definice horní závory tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $s - 1 < n$. Pak $s < n + 1$. Protože ale $\mathbb{N}$ je induktivní množina, platí $n + 1 \in \mathbb{N}$ a tedy z posledně uvedené nerovnosti plyne, že s není horní závora $\mathbb{N}$. To je žádaný spor. □

Následující lemma, které je lehkým zobecněním Archimedova axiomu, má důležitý geometrický význam.

Lemma 2.16. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \cdot a > b$.*

Důkaz. Protože $a > 0$, tzn. je nenulové, je dobře definován podíl b/a (nenastane zde problém s dělení nulou). Podle Lemmatu 2.15 pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$n > \frac{b}{a}.$$

Vynásobením této nerovnosti číslem a dostáváme tvrzení. □

Pokud chápeme kladné reálné číslo jako délku úsečky, pak Lemma 2.16 říká toto: Máme-li dvě úsečky délek $a > 0$ a $b > 0$, pak ať je jakkoliv první úsečka (délky a) krátká a druhá úsečka (délky b) dlouhá, vždy je možno první úsečku prodloužit konečně-krát (n-krát, kde $n \in \mathbb{N}$), aby výsledná úsečka byla delší než ta druhá.

Nyní se podívejme na množinu všech *celých* čísel. Tato množina vznikla jako reakce na to, že nelze v množině přirozených čísel odčítat jakákoliv čísla.

Definice 2.17 *Množinou všech celých čísel* rozumíme množinu

$$\{x - y \ ; \ x, y \in \mathbb{N}\},$$

značíme ji $\mathbb{Z}$.

Množina celých čísel je vlastně „nejmenší" podmnožina reálných čísel obsahující přirozená čísla, kde odčítání je operace (tzn. rozdíl libovolných dvou čísel z této množiny leží opět v této množině).

Jelikož podíl každých dvou celých čísel již nemusí být celé číslo, dostáváme se k množině všech *racionálních čísel*, kde to již platí (až na dělení nulou).

Definice 2.18 *Množinou racionálních čísel* rozumíme množinu

$$\{p/q \ ; \ p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\} = \{p/q \ ; \ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\},$$

značíme ji $\mathbb{Q}$.

Připomeňme, že každé racionální číslo se dá vyjádřit nekonečně mnoha způsoby – např. $1/2 = 2/4 = 3/6 = \dots$

Množina $\mathbb{Q}$ je uspořádané pole, které ovšem není úplně uspořádané pole – neplatí totiž axiom č. 16. Plyne to třeba z toho, že množina

$$\{x \in \mathbb{Q} \ ; \ x \cdot x < 2\}$$

nemá v $\mathbb{Q}$ supremum, přestože je ohraničená shora.

Zbývají nám *iracionální čísla*. To jsou taková reálná čísla, která nejsou racionální.

Definice 2.19 *Množinou všech iracionálních čísel* rozumíme množinu

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

značíme ji $\mathbb{I}$.

Z výše uvedeného je vidět, že

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Přitom platí $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ (protože např. $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$) a $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$ (protože např. $1/2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$) – dokažte. Dokázat nerovnost $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ je ekvivalentní s tím, že $\mathbb{I} \neq \emptyset$, tzn. s existencí alespoň jednoho iracionálního čísla – o tom se teprve dozvíme z Důsledku 2.33.

Nyní se podívejme na důležitý vztah mezi množinou racionálních a reálných čísel (Lemma 2.20) a vztah mezi množinou iracionálních a reálných čísel (Lemma 2.21).

Lemma 2.20. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ tak, že*

$$a < q < b.$$

Důkaz. Mohou nastat pouze tři případy:
(a): Nechť $0 \leq a < b$. Podle Lemmatu 2.16 existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n(b - a) > 1.$$

Uvažujme množinu

$$M = \{m \in \mathbb{N} \,;\, m > n \cdot a\}.$$

Podle Lemmatu 2.15 je neprázdná. Pak z faktu, že $(\mathbb{N}, \leq)$ je dobře uspořádaná množina (viz Poznámku 1.47) plyne, že M má nejmenší prvek – označme ho m_0. Protože $m_0 \in M$, platí také $m_0 > n \cdot a$. Kdyby také $m_0 - 1 > n \cdot a$, pak by $m_0 - 1 \in M$ a tedy m_0 by nemohl být nejmenším prvkem množiny M. Platí tedy

$$m_0 - 1 \leq n \cdot a.$$

Přičtením čísla 1 k oběma stranám nerovnosti dostáváme $m_0 \leq n \cdot a + 1$, přičemž po úpravě nerovnosti $n(b - a) > 1$ dostáváme $n \cdot b > n \cdot a + 1$. Díky tranzitivitě nerovnosti dostáváme $m_0 < nb$. Dohromady máme

$$n \cdot a < m_0 < n \cdot b,$$

odkud po podělení posledních nerovností kladným číslem n dostáváme žádané racionální číslo

$$q = \frac{m_0}{n}.$$

(b): Nechť $a < 0 < b$. V tomto případě stačí položit $q = 0$.
(c): Nechť $a < b \leq 0$. To tedy znamená, že $0 \leq -b < -a$. Podle části (a) pak existuje $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $-b < r < -a$. Odtud plyne

$$a < -r < b,$$

takže naším hledaným q je číslo $-r \in \mathbb{Q}$. $\square$

Podobné tvrzení lze říci i o iracionálních číslech. V jeho důkazu je ale potřeba vědět, že existuje alespoň jedno iracionální číslo – o tom se dozvíme až v Důsledku 2.33.

Lemma 2.21. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $r \in \mathbb{I}$ tak, že*

$$a < r < b.$$

Důkaz. Z Důsledku 2.33 plyne, že existuje $q \in \mathbb{I}$. Zřejmě $a - q < b - q$ a podle Lemmatu 2.20 existuje $p \in \mathbb{Q}$ tak, že

$$a - q < p < b - q.$$

Přičteme-li v obou nerovnostech číslo q dostáváme nerovnost

$$a < p + q < b.$$

Stačí již jen dokázat, že $p+q$ je iracionální. Kdyby totiž bylo racionální, pak by $(p+q)-p = q$ muselo být také racionální, protože rozdíl racionálních čísel je opět racionální číslo, což je spor. Tedy, $r = p + q \in \mathbb{I}$. $\square$

Lemmata 2.20 a 2.21 lze dohromady jednoduše formulovat tak, že „Mezi každými dvěma různými reálnými čísly vždy najdeme alespoň jedno racionální číslo a jedno iracionální číslo“. To nás okamžitě může vést k tvrzení, že „mezi každými dvěma různými reálnými čísly existuje nekonečně mnoho racionálních a iracionálních čísel“.

Poznámka 2.22 O podmnožině B uspořádané množiny $(A, \leq)$ se říká, že je *hustá* v A, jestliže pro každé dvě $a, b \in A$ taková, že $a < b$, existuje $c \in B$ tak, že

$$a < c < b.$$

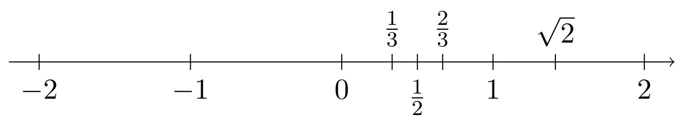
Pak lze formulovat Lemmata 2.20 a 2.21 takto: *Množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{I}$ jsou husté v $\mathbb{R}$.*

2.3 Reálná osa

Nyní již máme definovanou množinu všech reálných čísel, stejně tak jako některé její význačné podmnožiny. Možná ale někteří čtenáři jsou stále frustrováni faktem, že stále neví, jak si onu množinu reálných čísel představit.

Zavedení kladných reálných čísel bylo motivováno potřebou měřit délky úseček. Proto nás nepřekvapí, když reálná čísla můžeme interpretovat „geometricky“. Jedním z „modelů“ úplně uspořádaného pole je *přímka*. *Reálnou přímku* si představujeme jako přímku tvořenou body odpovídající reálným číslům. A to následovně. Dva různé body na této přímce jsou prohlášeny za 0 a 1. Tím je dána na reálné ose „jednotková délka“ (vzdáleností bodů 0 a 1) a orientace (bod 0 rozděluje reálnou osu na dvě polopřímky: ta, která obsahuje bod 1 obsahuje právě všechna nezáporná čísla, druhá obsahuje všechna nekladná čísla). Polohu přirozených čísel lze určit následujícím způsobem. Např. bod 2 je takový, že 1 leží uprostřed úsečky určené body 0, 2. Podobně určíme, kde leží další přirozená čísla. Dále číslo 1/2 je středem úsečky 0 a 1; čísla 1/3 a 2/3 rozdělují úsečku 0 a 1 na tři stejně dlouhé úsečky – viz Obrázek 2.1. A poloha iracionálních čísel je určena relací uspořádání a faktem, že pro reálná čísla x, y, z platí, že $x \leq z \leq y$ právě tehdy, když bod z leží na úsečce s krajními body x a y splňujícími podmínku $x < y$.

V těchto úvahách jsme sjednotili pojem reálného čísla a bodu na reálné ose. To budeme dělat i dále – často budeme v tomto skriptu mluvit o reálném čísle jako o bodu. Tato představa bude pro nás velmi užitečná.



Obrázek 2.1: Reálná osa.

2.4 Supremum a infimum množiny reálných čísel

Poslední základní vlastností množiny všech reálných čísel je axiom suprema (viz Definici 2.11), který říká, že pro každou shora ohraničenou množinu existuje alespoň jedno její supremum. Poměrně snadno se dá dokázat, že toto supremum je pro danou množinu jediné (dokažte třeba sporem). A co infimum?

Cvičení 2.23 Dokažte, že každá zdola ohraničená množina reálných čísel má infimum. [Návod: Uvědomte si, že $\ell \in \mathbb{R}$ je dolní závora množiny M právě tehdy, když $-\ell$ je horní závora množiny $\{-x \; ; \; x \in M\}$.]

Definice suprema a infima podmnožiny v $\mathbb{R}$ je velmi elegantní, ale častěji budeme v důkazech využívat následující charakterizující vlastnosti těchto pojmů.

Věta 2.24 (charakterizace suprema a infima)**.** *Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Platí, že*

(a) číslo $G \in \mathbb{R}$ je supremum množiny M právě tehdy, když

(i) $\forall x \in M \, : \; x \leq G$ *a*

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, \; G' < G \; \exists x \in M \, : \; x > G'$, *neboli*

(ii') $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \; \varepsilon > 0 \; \exists x \in M \, : \; x > G - \varepsilon$,

(b) číslo $g \in \mathbb{R}$ je infimum množiny M právě tehdy, když

(i) $\forall x \in M \, : \; x \geq g$ *a*

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, \; g' > g \; \exists x \in M \, : \; x < g'$, *neboli*

(ii') $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \; \varepsilon > 0 \; \exists x \in M \, : \; x < g + \varepsilon$.

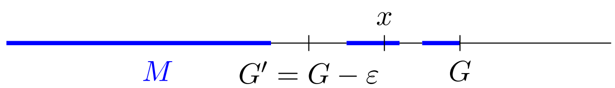
Důkaz. Proveďme pouze pro supremum (pro infimum se provedou duální úvahy, tzn. stačí zaměnit nerovnosti za opačné, horní závory za dolní, pojem sup za inf, atd. – podrobně proveďte). Podle definice je supremum nejmenší horní závora. Výrok (i) říká, že G je horní závora množiny M. Výrok (ii) se dá ekvivalentně přepsat takto

$$\forall G' \in \mathbb{R}, \; G' < G \, : \; \neg(\forall x \in M \, : \; x \leq G').$$

To ale říká, že každé číslo menší než G není horní závorou množiny M, neboli všechna čísla menší než G nejsou horní závory množiny M. Výrok (ii') je s (ii) ekvivalentní; stačí položit

$$G' = G - \varepsilon \quad \text{a obráceně} \quad \varepsilon = G - G'. \qquad \square$$

Poznámka 2.25 Jak již bylo zmíněno, výroky ve Větě 2.24 budeme často využívat. Oba výroky (i) a (ii) (nebo (ii')) je dobré pro pochopení i snadné zapamatování nakreslit – viz Obrázek 2.2 pro supremum.



Obrázek 2.2: Ilustrace výroku (ii) resp (ii') z Věty 2.24.

Cvičení 2.26 Dokažte: Má-li $M \subset \mathbb{R}$ největší (resp. nejmenší) prvek, pak je roven $\sup M$ (resp. $\inf M$).

Příklad 2.27 Pokud existují, určete nejmenší a největší prvek množiny

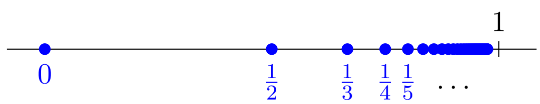
$$M = \left\{1 - \frac{1}{n} \ ; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Určete infimum a supremum množiny M.

Řešení. Nejprve si vypišme několik prvků této množiny:

$$M = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\},$$

viz Obrázek 2.3. Z něj je celkem dobře vidět, že jednou z dolních závor je číslo 0, které leží



Obrázek 2.3: Množina M z Příkladu 2.27.

v množině M. Jde tedy o nejmenší prvek množiny M a vzhledem k Cvičení 2.26 je to také $\inf M$. Dále z obrázku vidíme, že jednou z horních závor je číslo 1. Přitom asi půjde o tu nejmenší. Dokažme s pomocí Věty 2.24, že $\sup M = 1$. Nejprve dokažme (i), tzn.

$$\forall x \in M \ : \ x \leq 1,$$

což lze také napsat takto

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 1 - \frac{1}{n} \leq 1.$$

Odečtením 1 od obou stran nerovnosti dostáváme

$$-\frac{1}{n} \leq 0,$$

která zřejmě pro všechna $n \in \mathbb{N}$ skutečně platí. Dokažme, že platí také (ii). Zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < 1$ libovolně. Máme najít $x \in M$ tak, že $x > G'$, tedy máme dokázat existenci $n \in \mathbb{N}$ takového, že

$$1 - \frac{1}{n} > G'.$$

Dokazovaná nerovnost je ale díky faktu, že $G' - 1 > 0$ ekvivalentní s nerovností

$$n > \frac{1}{1 - G'}.$$

Podle Archimedova axiomu takové n existuje, tedy platí (ii). Tím je dokázáno, že $\sup M = 1$. Kdyby měla množina M největší prvek, muselo by platit $\max M = \sup M$. Protože ale $\sup M = 1 \notin M$, množina M nemá největší prvek. ◯

2.5 Mocnina reálného čísla

Doposud jsme pracovali se čtyřmi aritmetickými operacemi: sčítání, odčítání, násobení a dělení reálných čísel (dělení tak docela operací na $\mathbb{R}$ není, protože nelze dělit nulou).

Dále budeme potřebovat zavést „operaci“ umocňování, se kterou se setkáme při definici mocninné a exponenciální funkce v kapitole 4. Začneme definicí přirozené a celé mocniny, tzn. v exponentu je přirozené a celé číslo[1].

Definice 2.28 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Definujeme

$$a^1 = a, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$. Definujeme

$$a^0 = 1, \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Cvičení 2.29 Dokažte:

1. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

[Návod: Nejprve dokažte uvedené rovnosti pro přirozené m, n (matematickou indukcí) a pak dokažte pro celé m, n.]

2. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $m, n \in \mathbb{Z}$ platí:
   - $a > 1$ a $m < n$, pak $a^m < a^n$,
   - $0 < a < 1$ a $m < n$, pak $a^m > a^n$.

Dále budeme definovat n-tou odmocnina kladného reálného čísla. Nejdříve je ale potřeba dokázat, že taková definice má smysl.

Lemma 2.30. *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje právě jedno kladné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\alpha^n = a$.*

[1] Připomeňme, že ve výrazu a^b se a říká základ a b exponent.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro $a = 2$ a $n = 2$. Ostatní případy se dokáží podobně.
KROK 1. Nejprve dokažme jednoznačnost, tzn. že neexistují dvě různá kladná α jejíž druhá mocnina je rovna 2 – sporem. Nechť existují dvě různá čísla α_1, $\alpha_2 > 0$ taková, že $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 2$. Pak

$$0 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Protože $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, podělením předchozí rovnosti tímto součtem dostáváme $0 = \alpha_1 - \alpha_2$. Tedy $\alpha_1 = \alpha_2$. To je ve sporu s předpokladem.
KROK 2. Nyní dokažme existenci čísla α. Uvažujme množinu

$$M = \{x \in \mathbb{R} \, ; \, 0 < x \wedge x^2 < 2\}$$

(zkuste si načrtnout množinu M). Nejprve dokážeme, že $\sup M \in \mathbb{R}$. To je jednoduché. Protože $1 \in M$, platí $M \neq \emptyset$. Dále, je-li $x \in M$, pak $x^2 < 2 < 4$, takže $0 < x < 2$. Množina M je tedy shora ohraničená. Z axiomu 16 plyne, že $\sup M$ existuje, označme ho písmenem α. Stačí již dokázat, že α je ono číslo z tvrzení věty. Protože jde o horní závoru množiny M a $1 \in M$, pak $\alpha \geq 1$, tedy je to kladné číslo. Konečně dokažme, že $\alpha^2 = 2$. Opět sporem, tzn. předpokládejme, že $\alpha^2 \neq 2$. Podle trichotomie nerovnosti v $\mathbb{R}$ pak platí buď $\alpha^2 < 2$ nebo $\alpha^2 > 2$. Rozeberme každý případ zvlášť.
(i) Nechť $\alpha^2 < 2$. Nejprve nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 < 2. \tag{2.1}$$

Upravme nerovnost (2.1) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ na

$$\alpha^2 + 2\alpha\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Platí tato nerovnost pro alespoň jedno $n \in \mathbb{N}$? Aby platila, stačí dokázat nerovnost

$$\alpha^2 + 2\alpha\frac{1}{n} + \frac{1}{n} < 2,$$

protože $1/n \geq 1/n^2$. Tato je ovšem vzhledem k předpokladu $\alpha^2 < 2$ ekvivalentní s nerovností

$$n > \frac{2\alpha + 1}{\alpha^2 - 2},$$

která již podle Archimedova axiomu (Lemma 2.15) skutečně platí pro alespoň jedno $n \in \mathbb{N}$. Tedy (2.1) pro toto n platí, z čehož okamžitě vyplývá, že $\alpha + 1/n \in M$. To je ve sporu s tím, že $\alpha = \sup M$.
(ii) Nechť $\alpha^2 > 2$. Nejprve nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 > 2. \tag{2.2}$$

Umocníme-li levou stranu této nerovnosti, dostáváme

$$\alpha^2 - 2\alpha\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Platí tato nerovnost pro alespoň jedno $n \in \mathbb{N}$? Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\alpha^2 - 2\alpha\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \alpha^2 - 2\alpha\frac{1}{n},$$

stačí dokázat existenci takového $n \in \mathbb{N}$, pro které platí nerovnost

$$\alpha^2 - 2\alpha\frac{1}{n} > 2.$$

Tato nerovnost je ovšem ekvivalentní (ověřte) s nerovností

$$n > -\frac{2\alpha}{2-\alpha^2},$$

která již podle Archimedova axiomu (Lemma 2.15) alespoň pro jedno $n \in \mathbb{N}$ platí. Pro toto n platí tedy i nerovnost (2.2), a následně pro každé $x \in M$ platí

$$x^2 < 2 < \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Tedy pro všechna $x \in M$ platí, že $x < \alpha - \frac{1}{n}$, což znamená, že $\alpha - \frac{1}{n}$ je také horní závora množiny M. To je ale ve sporu s tím, že α je nejmenší horní závora množiny M. Nemůže tedy platit ani $\alpha^2 > 2$.

Dokázali jsme tak, že $\alpha^2 = 2$ a $\alpha > 0$. □

Definice 2.31 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Kladné reálné číslo α splňující rovnost $\alpha^n = a$ nazýváme *n-tou odmocninou čísla a* a značíme $\sqrt[n]{a}$. Pro $n = 2$ píšeme zkráceně $\sqrt{a}$.

Lemma 2.32. *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

Důkaz. Provedeme sporem. Předpokládejme, že je to racionální číslo, tedy existují dvě přirozená čísla m a n taková, že

$$2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Navíc lze předpokládat, že zlomek m/n je v základním tvaru, tzn. m a n jsou nesoudělná. Pokud by totiž m a n soudělná *byla*, dá se postupným krácením dojít ke zlomku rovnému číslu m/n jehož čitatel a jmenovatel již jsou nesoudělná. No a aby nám tu nevznikala další písmena (kdo se v nich má pak orientovat) můžeme je rovnou označit za m a n. Z poslední rovnosti plyne $m^2 = 2n^2$, tzn. m^2 je sudé číslo. Kdyby m bylo liché, muselo by i m^2 být liché, tedy m je také sudé číslo. Takže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $m = 2k$. Pak $(2k)^2 = 2n^2$, tzn. po úpravě

$$2k^2 = n^2,$$

odkud je zase vidět, že n^2 je sudé. Odtud plyne, že i n je sudé. Tedy obě čísla jsou soudělná, protože jsou obě dělitelná dvěma – to je spor s předpokladem nesoudělnosti m a n. □

Důsledek 2.33. *Existuje alespoň jedno iracionální číslo, tzn.* $\mathbb{I} \neq \emptyset$.

Poznámka 2.34 V Definici 2.31 jsme n-tou odmocninu z kladného čísla a definovali jako číslo, které když umocníme na n, dostáváme původní a. A kvůli jednoznačnosti jsme tuto odmocninu definovali jako *kladné číslo* (ono totiž platí $(-1)^2 = 1^2 = 1$). Tuto úvahu lze částečně rozšířit i pro a nekladná:

(a) Protože $0^n = 0$, definujeme

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

(b) Sudá odmocnina ze záporného čísla nemůže být v rámci množiny $\mathbb{R}$ definována, protože jakákoliv sudá mocnina reálného čísla je nezáporná (viz Cvičení 2.9(7)). Naproti tomu lichá odmocnina ze záporného čísla a je rovna $-\sqrt[n]{-a}$ (všimněte si, že $-a > 0$). Skutečně, je-li n liché, pak

$$\left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = (-1)^n \sqrt[n]{-a}^n = -(-a) = a,$$

např. $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Nyní již lze zavést pojem racionální mocniny.

Definice 2.35 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $q = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (tzn. $q \in \mathbb{Q}$). Definujeme

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}$$

a nazýváme tento výraz *q-tá mocnina čísla a*. Stejným předpisem definujeme mocninu s racionálním exponentem i pro nekladný základ, a to za těchto předpokladů:

- je-li $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $q = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, n je liché, nebo
- je-li $a \in \mathbb{R}$, $q = m/n$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, n je liché.

V Definici 2.35 zaměřme naši pozornost na obory hodnot základů a exponentů. Vidíme, že pro kladný základ lze definovat racionální mocninu pro jakékoliv racionální číslo q. Jak již bylo zmíněno v Poznámce 2.34, dělá nám problémy odmocnina ze záporného čísla. Proto při definici racionální mocniny ze záporného čísla je třeba, aby jmenovatel q bylo liché číslo. Při nedodržení této dohody bychom dostali třeba takovýto nesmysl

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1.$$

Podobně, nultou mocninu nemůžeme definovat pro nulový základ.

O racionální mocnině lze říct podobné věci jako o celé mocnině:

Cvičení 2.36 Dokažte:

1. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $p, q \in \mathbb{Q}$ platí

   $$a^{p+q} = a^p a^q, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p.$$

   [Návod: Využijte výsledky Cvičení 2.29.]

2. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $p, q \in \mathbb{Q}$ platí:

   - $a > 1$ a $p < q$, pak $a^p < a^q$,
   - $0 < a < 1$ a $p < q$, pak $a^p > a^q$.

Přirozeně se můžeme ptát, zda lze smysluplně uvažovat mocninu mající v exponentu reálné číslo. Odpověď je kladná, při definici využijeme dříve zjištěných vlastností racionálních mocnin. Naše definice bude používat pojem suprema a infima.

Definice 2.37 Nechť $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Je-li

- $0 < a < 1$, definujeme
$$a^\alpha = \inf\{a^q \ ; \ q \in \mathbb{Q} \wedge q < \alpha\},$$
- $a = 1$, pak
$$1^\alpha = 1,$$
- $a > 1$, definujeme
$$a^\alpha = \sup\{a^q \ ; \ q \in \mathbb{Q} \wedge q < \alpha\}.$$

Proč definovat reálnou mocninu zrovna takto? Mezi hlavní důvody patří fakt, že např. pro racionální čísla platí „monotonie vzhledem k exponentu“ – viz Cvičení 2.36(2). Rádi bychom, aby se tato monotonie přenesla i na reálná čísla, např. aby platilo: pro $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $p, q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $p < \alpha < q$ platí

$$a^p > a^\alpha > a^q;$$

jinak řečeno, jestliže reálné číslo α je ohraničeno zdola a shora racionálními čísly, měla by i mocnina a^α být omezována mocninami se základem a.

Poznámka 2.38 Už ne tak snadno se dají dokázat následující vlastnosti reálné mocniny:

1. Pro $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ platí
$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha.$$
2. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí
   - $a > 1$ a $\alpha < \beta$, pak $a^\alpha < a^\beta$,
   - $0 < a < 1$ a $\alpha < \beta$, pak $a^\alpha > a^\beta$.
3. Pro $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b, \alpha > 0$ platí
$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^\alpha < b^\alpha.$$

2.6 Intervaly

Připomeňme si jistý typ množin reálných čísel, se kterými jsme se setkali již na střední škole. Bude se nám hodit i zde. Jsou to intervaly.

Definice 2.39 Množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazveme *intervalem*, jestliže pro každé dva prvky $a, b \in M$ a každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $a < x < b$ platí, že $x \in M$.

Jinak řečeno, interval je taková podmnožina $\mathbb{R}$, která s každými svými dvěma prvky obsahuje také všechny prvky mezi nimi.

Cvičení 2.40 Dokažte, že průnik dvou intervalů je opět interval.

Existuje pouze konečný počet typů intervalů. V následující definici zavádíme značení známé již ze střední školy.

Definice 2.41 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Definujeme

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ tzv. *otevřený interval*,
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\}$ tzv. *uzavřený interval*,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x < b\}$ tzv. *zprava otevřený (nebo zleva uzavřený) interval*,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \le b\}$ tzv. *zprava uzavřený (nebo zleva otevřený) interval*,
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x\}$,
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$,
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \le b\}$,
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

V případě $a = b$ říkáme, že jde o *degenerovaný interval*, přitom

$$[a, a) = (a, a] = (a, a) = \emptyset, \quad [a, a] = \{a\}.$$

Cvičení 2.42 Dokažte, že v Definici 2.41 jsou uvedeny právě všechny možné typy intervalů. [Návod: Uvažujte interval M a vyšetřete všechny případy vzhledem k ohraničnosti M shora/zdola a existence/neexistence největšího a nejmenšího prvku.]

Dále se od čtenáře očekává, že ze střední školy umí pracovat s intervaly – zobrazovat je, provádět průniky a sjednocení intervalů (např. při řešení nerovnic).

2.7 Absolutní hodnota reálného čísla

Nejprve si připomeňme definici.

Definice 2.43 *Absolutní hodnotou čísla* $a \in \mathbb{R}$ rozumíme číslo

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jestliže } a \ge 0, \\ -a & \text{jestliže } a < 0. \end{cases}$$

Také bychom měli umět s absolutní hodnotou pracovat. K tomu je třeba znát několik faktů.

Cvičení 2.44 Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

(a) $|x| = \max\{x, -x\}$,

(b) $|xy| = |x||y|$,

(c) $y \neq 0 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$,

(d) $|x - y| = |y - x|$,

(e) $|x| \geq 0$, $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|x| \leq -x \leq |x|$, $|-x| = |x|$,

(f) $0 \leq x < y \Rightarrow |x| < |y|$,

(g) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$,

(h) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost),

(i) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Cvičení 2.45 Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

(tzv. zobecněná trojúhelníková nerovnost).

2.8 Vzdálenost dvou reálných čísel

V následujících kapitolách se budeme často vyjadřovat o „blízkosti“ reálných čísel, nebo o „přibližování“ nějakých čísel k nějakému číslu. Abychom mohli něco takového říkat, je nutné se nejprve dohodnout, co myslíme vzdáleností dvou reálných čísel. V souhlasu s naší představou množiny reálných čísel jakožto s přímkou, je přirozené definovat *vzdálenost reálného čísla x od reálného čísla y* jako

$$|x - y|.$$

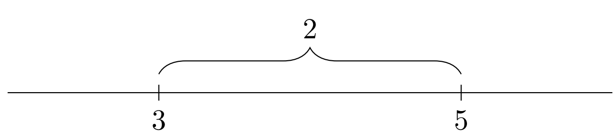
Nyní můžeme mluvit o blízkosti dvou reálných čísel. Např. řekneme-li, že „x je od y dál než od z“, rozumíme tím, že číslo $|x - y|$ je větší než číslo $|x - z|$.

Příklad 2.46 Určete vzdálenost čísla 3 od 5.

Řešení. Podle naší definice jde o číslo

$$|3 - 5| = |5 - 3| = 2,$$

což zcela odpovídá naší představě vzdáleností čísel 3 a 5 na reálné ose, viz Obrázek 2.4. ◯



Obrázek 2.4: Vzdálenost čísla 3 od 5.

Poznámka 2.47 Zejména nás budou zajímat množiny bodů, které budou mít od zadaného bodu vzdálenost menší než nějaké kladné reálné číslo. Např. by nás mohlo zajímat, jak vypadá množina všech reálných čísel x splňujících nerovnici s absolutní hodnotou

$$|x - 1| < 3.$$

Na střední škole se rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou řeší rozdělením množiny $\mathbb{R}$ na podintervaly jejichž krajní body jsou čísla, která vynulují výrazy v absolutní hodnotě (v našem případě jde o číslo 1). Náš příklad je ovšem o dost jednodušší a dá se řešit „geometricky“. Máme vlastně určit taková x, která mají od čísla 1 vzdálenost menší než 3. Nakreslíme-li si reálnou osu a na ní číslo 1, okamžitě vidíme, která čísla jsou od něj vzdálena méně než o 3. Řešením je zřejmě interval

$$(1-3, 1+3) = (-2, 4).$$

Cvičení 2.48 Řešte „geometricky“ následující nerovnice s absolutní hodnotou:

1. $|x-3| < 1$,
2. $|x+5| < 2$,
3. $1 \leq |x-2|$,
4. $0 < |x-2|$,
5. $|x-a| < 1$, kde $a \in \mathbb{R}$,
6. $|x-4| < \varepsilon$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$,
7. $|x-a| < \varepsilon$, kde $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Poznámka 2.49 Zdůrazněme nejdůležitější vlastnosti pojmu vzdálenosti a jejich interpretaci:

- Pro jakékoliv $x, y \in \mathbb{R}$ je číslo $|x-y|$ vždy nezáporné (viz Cvičení 2.44(e)). Navíc, nuly nabývá právě tehdy, když $x = y$. Tedy podrobně:
  - jestliže $|x-y| = 0$, pak $x = y$,
  - jestliže $x = y$, pak $|x-y| = 0$,
  - jestliže $|x-y| > 0$, pak $x \neq y$ a
  - jestliže $x \neq y$, pak $|x-y| > 0$.
- Rovnost ve Cvičení 2.44(d), se dá interpretovat tak, že vzdálenost čísla x od y je stejná jako vzdálenost y od x.
- Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}$ jsou libovolná. Pak s využitím trojúhelníkové nerovnost (Cvičení 2.44(h)) dostáváme
  $$|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$
  Tedy vzdálenost dvou libovolných reálných čísel (x a y) je menší nebo rovna součtu vzdáleností těchto čísel od nějakého třetího čísla (z).

Právě tyto tři vlastnosti dělají z výrazu $|x-y|$ *vzdálenost* mezi x a y, tedy to, co od pojmu vzdálenosti intuitivně očekáváme.

Závěrem dodejme, že vzdálenost dvou čísel jsme mohli smysluplně definovat i jinak, např. předpisem

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|,$$

přitom i tato definice vzdálenosti by měla vlastnosti z Poznámky 2.49. My ale k tomu nemáme zatím žádný důvod, takže se spokojíme s jedinou definicí.

2.9 Okolí reálného čísla

Jak bylo předesláno v Poznámce 2.47, budou nás zajímat množiny bodů, které jsou od daného bodu nějakým způsobem blízko.

Definice 2.50 Nechť $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; |x - a| < \varepsilon\}$$

nazýváme *ε-okolím bodu a*. Číslu ε říkáme *poloměr* okolí a číslu a říkáme jeho *střed*. Množinu

$$\mathcal{R}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

nazýváme *redukovaným ε-okolím bodu a*.

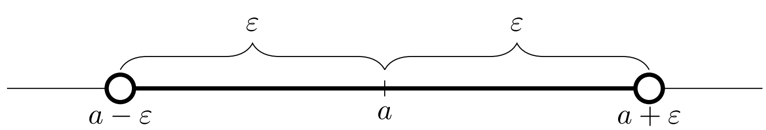
Poznámka 2.51 Podle Cvičení 2.44(g) platí ekvivalence

$$|x - a| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

pro každé $x, a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, což má za důsledek, že

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

(viz také Příklad 2.48(7)). To si lze představit tak jako na Obrázku 2.5.

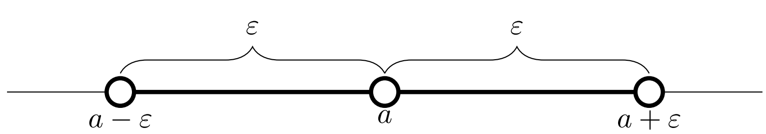


Obrázek 2.5: ε-okolí bodu a.

Dále, nerovnost $0 < |x - a|$ je ekvivalentní s nerovností $x \neq a$ (viz Poznámku 2.49). Dohromady tedy dostáváme, že

$$\mathcal{R}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) = \mathcal{U}_\varepsilon(a) \setminus \{a\},$$

což si lze představit tak jako na Obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: Redukované ε-okolí bodu a.

Poznámka 2.52 V některých případech není úplně třeba vypisovat poloměr okolí, tzn. místo $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ lze psát pouze $\mathcal{U}(a)$. To je možné v případech, kdy v rámci definice, věty či důkazu mluvíme o jediném okolí, a ani se dále nepotřebujeme na poloměr tohoto okolí odkazovat. Také je vhodné toho využívat v kvantifikovaných výrocích. Např. místo výroku

$$\exists \varepsilon > 0 \; : \; \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subset M$$

lze psát

$$\exists \mathcal{U}_\varepsilon(a) \; : \; \mathcal{U}_\varepsilon(a) \subset M,$$

ale to lze jednodušeji psát

$$\exists \mathcal{U}(a) \; : \; \mathcal{U}(a) \subset M.$$

Je to z toho důvodu, že hodnota poloměru vlastně není nijak důležitá. S tímto výrokem se setkáme v Definici 2.57. Podobně toto značení budeme používat pro redukované okolí.

Věta 2.53. *Nechť $a, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Pak platí*

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a) = \mathcal{U}_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(a), \quad \mathcal{R}_{\varepsilon_1}(a) \cap \mathcal{R}_{\varepsilon_2}(a) = \mathcal{R}_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(a),$$

tzn. průnik dvou (redukovaných) okolí bodu a je opět (redukované) okolí tohoto bodu a jeho poloměr je roven menšímu z poloměrů těchto dvou okolí.

Důkaz. Uvažujme dvě okolí bodu a s poloměry ε_1, ε_2, přitom nechť pro určitost platí $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ (v opačném případě okolí přeznačíme). Potom

$$a - \varepsilon_2 \leq a - \varepsilon_1 < a < a + \varepsilon_1 \leq a + \varepsilon_2,$$

tedy

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) = (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) = \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a).$$

S využitím Cvičení 1.30(9) dostáváme

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a) = \mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a).$$

Protože $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tvrzení platí. Podobně se provede důkaz pro redukované okolí. □

Věta 2.54. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Pak existují $\mathcal{U}(a)$ a $\mathcal{U}(b)$ taková, že*

$$\mathcal{U}(a) \cap \mathcal{U}(b) = \emptyset,$$

tzn. tato okolí jsou disjunktní.

Důkaz. Uvažujme $a, b \in \mathbb{R}$ navzájem různé, z čehož plyne $|a - b| > 0$ (viz Poznámku 2.49). Označme $\varepsilon = |a - b|/2$ a uvažujme okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ a $\mathcal{U}_\varepsilon(b)$. Dokážeme, že jsou disjunktní – sporem. Tedy naopak předpokládejme, že $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(b) \neq \emptyset$, tzn. existuje $x \in \mathbb{R}$ takový, že $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$ a současně $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(b)$. Pak platí

$$|a - b| = |a - x + x - b| \leq |a - x| + |x - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|,$$

kde jsme v první nerovnosti použili trojúhelníkovou nerovnost a v druhé nerovnosti definici okolí. Odtud dostáváme $|a - b| < |a - b|$, což je nepravdivý výrok. Tato dvě okolí jsou tedy disjunktní. □

Někdy je potřeba uvažovat jen ty body z okolí bodu a, které jsou od něj „napravo“, resp. „nalevo“. Definujeme *jednostranná okolí.*

Definice 2.55 Nechť $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon^+(a) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; |x-a| < \varepsilon \wedge x \geq a\} = [a, a+\varepsilon)$$

nazýváme *pravým ε-okolím bodu a*, množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon^-(a) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; |x-a| < \varepsilon \wedge x \leq a\} = (a-\varepsilon, a]$$

nazýváme *levým ε-okolím bodu a*, množinu

$$\mathcal{R}_\varepsilon^+(a) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; 0 < |x-a| < \varepsilon \wedge x \geq a\} = (a, a+\varepsilon)$$

nazýváme *pravým redukovaným ε-okolím bodu a* a množinu

$$\mathcal{R}_\varepsilon^-(a) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; 0 < |x-a| < \varepsilon \wedge x \leq a\} = (a-\varepsilon, a)$$

nazýváme *levým redukovaným ε-okolím bodu a.*

Poznámka 2.56 Pro jednostranná okolí platí podobná tvrzení jako pro „oboustranná“ okolí.

(a) Průnik dvou pravých/levých (redukovaných) okolí stejného reálného čísla je opět pravé/levé (redukované) okolí tohoto čísla.

(b) Pro $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ platí

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \mathcal{U}_\varepsilon^-(a) \cup \mathcal{U}_\varepsilon^+(a) \quad \text{a} \quad \mathcal{R}_\varepsilon(a) = \mathcal{R}_\varepsilon^-(a) \cup \mathcal{R}_\varepsilon^+(a),$$

$$\{a\} = \mathcal{U}_\varepsilon^-(a) \cap \mathcal{U}_\varepsilon^+(a) \quad \text{a} \quad \emptyset = \mathcal{R}_\varepsilon^-(a) \cap \mathcal{R}_\varepsilon^+(a).$$

Definice 2.57 Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *vnitřní bod* množiny M, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$ takové, že

$$\mathcal{U}(a) \subset M.$$

Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme *vnitřkem* množiny M, značíme $\operatorname{int} M$.

Poznámka 2.58 Z předchozí definice okamžitě plyne, že vnitřní bod množiny je jejím prvkem, tzn.

$$\operatorname{int} M \subset M.$$

Příklad 2.59 Určete vnitřek množiny $M = [0, 1)$.

Řešení. Z Poznámky 2.58 plyne, že má smysl uvažovat pouze prvky množiny M. Začněme třeba číslem 0. Ptáme se, zda existuje takový interval $(-\varepsilon, \varepsilon) = \mathcal{U}_\varepsilon(0)$, že

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset [0, 1)?$$

Evidentně ne, protože, ať je ε sebemenší, interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ vždy obsahuje číslo $-\varepsilon/2 < 0$, které nepatří do $[0, 1)$. Tedy 0 není vnitřní bod intervalu $[0, 1)$. Vezměme $a \in (0, 1)$. Položíme-li

$$\varepsilon = \min\{a, 1-a\},$$

pak se snadno přesvědčíme, že $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (0,1)$. Tedy právě každé číslo z intervalu $(0,1)$ je vnitřním bodem M, tzn.

$$\operatorname{int}[0,1) = (0,1).$$

$\bigcirc$

2.10 Rozšířená množina reálných čísel

Množinu reálných čísel je možno smysluplně rozšířit ještě o dva prvky. Budeme jim říkat *plus nekonečno* a *mínus nekonečno* a značit symboly $+\infty$ a $-\infty$. Pro jednoduchost budeme zkráceně místo $+\infty$ psát prostě ∞ a nazývat jen *nekonečno* (v našem kurzu si to můžeme dovolit, ale např. v kurzu funkce komplexní proměnné se setkáme s „komplexním“ nekonečnem, které se značí symbolem ∞, a je odlišné od našeho $+\infty$). Přitom množinu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

budeme nazývat *rozšířenou reálnou osou* nebo *rozšířenou množinou reálných čísel.* Smysluplnost této definice oceníme až v dalších kapitolách. Dále je třeba rozšířit základní „operace“ a relaci uspořádání z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně s výhodou rozšíříme pojem okolí reálného čísla i pro body ∞, $-\infty$. Reálným číslům budeme říkat *vlastní čísla*, prvkům ∞ a $-\infty$ budeme říkat *nevlastní čísla*.

Poznámka 2.60

(a) Rozšiřme definici sčítání na $\mathbb{R}^*$ takto:

- je-li $a \in \mathbb{R}$, pak $a + \infty = \infty + a = \infty$, $a - \infty = -\infty + a = -\infty$,
- $\infty + \infty = \infty$,
- $-\infty + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$.

Definici násobení a umocňování rozšíříme tato:

- je-li $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, pak $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- je-li $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, pak $a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty \cdot \infty = -\infty$,
- je-li $n \in \mathbb{N}$, pak $\infty^n = \infty$, $(-\infty)^n = (-1)^n \infty$,

Odčítání a dělení definujeme takto:

- je-li $a \in \mathbb{R}$, pak $a - \infty = -\infty - a = -\infty$, $\infty - a = a - (-\infty) = \infty$,
- $\infty - (-\infty) = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$,
- je-li $a \in \mathbb{R}$, pak $a/\infty = a/(-\infty) = 0$.

Absolutní hodnotu nevlastních čísel definujeme jako

$$|\pm\infty| = \infty.$$

(b) Výsledky aritmetických operací nevlastních čísel jsme neučinili libovolně ale ze zcela konkrétních důvodů – kvůli jednodušší formulaci Vět 3.60 a 5.43.

(c) Důležité je také zmínit výrazy, jejichž výsledky nedefinujeme – říkáme jim *neurčité*.

- $\infty + (-\infty)$, $-\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$,
- $0 \cdot (\pm\infty)$, $\pm\infty \cdot 0$,
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\mp\infty}{\pm\infty}$.

Poznámka 2.61 Předchozí definici výrazů s nevlastními čísly (a neurčité výrazy) si lze snadno zapamatovat takto: Pod bodem ∞ si lze představovat obrovské číslo a pod $-\infty$ si lze představovat obrovské záporné číslo. Pak $a + \infty$ lze chápat jako součet nějakého čísla a obrovského čísla, což dá obrovské číslo, apod. Tato úvaha ovšem selhává u neurčitých výrazů. Např. neurčitý výraz $\infty - \infty$ je problematický v tom, že odečtením dvou velkých obrovských čísel můžeme dostat cokoliv, podle toho, „jak se od sebe ta čísla liší“ – výsledek může být nula, stejně tak jako to může být obrovské číslo či cokoliv jiného. Přesný důvod zavedení aritmetických operací pro nevlastní čísla a důvod existence nevlastních výrazů si ukážeme v kapitole o posloupnostech reálných čísel.

Rozšířit můžeme také relaci uspořádání na $\mathbb{R}^*$ a to takto:

- je-li $a \in \mathbb{R}$, definujeme $-\infty \leq a \leq \infty$,
- $-\infty \leq \infty$.

Tato rozšířená relace je relací uspořádání na $\mathbb{R}^*$, které je navíc úplné a *budeme ji značit stejným znakem $\leq$ i když jde vlastně o jinou o relaci.* Protože pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $a \neq \infty$, $a \neq -\infty$, $-\infty \neq \infty$, platí i ostré nerovnosti: $-\infty < a < \infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$ a $-\infty < \infty$.

Poznámka 2.62 Je tedy důležité si uvědomit, že v této chvíli tu máme dvě různé úplně uspořádané množiny, a to $(\mathbb{R}, \leq)$ a $(\mathbb{R}^*, \leq)$ Přitom úplně uspořádaná množina $(\mathbb{R}^*, \leq)$ má nejmenší i největší prvek: $-\infty$ a ∞. Proto tedy *každá podmnožina $\mathbb{R}^*$ je ohraničená (tedy i každá podmnožina $\mathbb{R}$)* vzhledem k této „rozšířené“ relaci uspořádání. Jestliže se budeme dále vyjadřovat o ohraničenosti podmnožiny reálných čísel budeme tím *vždy* rozumět ohraničenost vzhledem k relaci uspořádání na $\mathbb{R}$.

Nyní můžeme rozšířit pojem suprema a infima v $\mathbb{R}^*$ i pro neohraničené množiny.

Definice 2.63 Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$.

- Je-li M neohraničená shora (v $\mathbb{R}$), definujeme $\sup M = \infty$.
- Je-li M neohraničená zdola (v $\mathbb{R}$), definujeme $\inf M = -\infty$.

Poznámka 2.64 Definice 2.63 by nás neměla překvapit. Supremum množiny ohraničené shora (v $\mathbb{R}$) jsme definovali jako nejmenší horní závoru této množiny. Oproti tomu neohraničené množiny (v $\mathbb{R}$) nemají v $\mathbb{R}$ horní závoru, ovšem $\infty \in \mathbb{R}^*$ je závora *každé* množiny reálných čísel. Je-li taková množina neohraničená v $\mathbb{R}$, pak ∞ je jedinou, tedy nejmenší horní závorou (v $\mathbb{R}^*$). Definice 2.63 nám v budoucnu umožní elegantnější formulaci vět.

Cvičení 2.65 Dokažte: Je-li $\emptyset \neq M \subset N \subset \mathbb{R}$, pak

$$\sup M \leq \sup N \quad \text{a} \quad \inf M \geq \inf N.$$

Nakonec ještě zavedeme pojem okolí a redukovaného okolí nevlastních bodů.

Definice 2.66 Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

nazýváme *ε-okolím bodu* ∞. Množinu

$$\mathcal{R}_\varepsilon(\infty) = \mathcal{U}_\varepsilon(\infty)$$

nazýváme *redukovaným ε-okolím bodu* ∞. Množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

nazýváme *ε-okolím bodu* $-\infty$. Množinu

$$\mathcal{R}_\varepsilon(-\infty) = \mathcal{U}_\varepsilon(-\infty)$$

nazýváme *redukovaným ε-okolím bodu* $-\infty$.

Cvičení 2.67 Dokažte, že pro $a \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, platí

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a) \quad \text{a} \quad \mathcal{R}_{\varepsilon_1}(a) \subset \mathcal{R}_{\varepsilon_2}(a).$$

Věty 2.53 a 2.54 je možné zobecnit i pro okolí čísel z $\mathbb{R}^*$.

Věta 2.68.

(i) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Pak

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a) = \mathcal{U}_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(a) \quad a \quad \mathcal{R}_{\varepsilon_1}(a) \cap \mathcal{R}_{\varepsilon_2}(a) = \mathcal{R}_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(a),$$

tzn. průnik dvou (redukovaných) okolí stejného bodu z $\mathbb{R}^*$ je opět (redukované) okolí tohoto bodu.

(ii) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Pak existují $\mathcal{U}(a)$ a $\mathcal{U}(b)$ taková, že

$$\mathcal{U}(a) \cap \mathcal{U}(b) = \emptyset,$$

a navíc platí

$$\forall x \in \mathcal{U}(a)\ \forall y \in \mathcal{U}(b) :\ x < y.$$

Důkaz. ad (i): Uvažujme dvě okolí $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a)$, $\mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a)$, přitom předpokládejme, že $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2$ (pokud to neplatí, přeznačíme ε_1 za ε_2), tzn. $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Pak podle Cvičení 2.67 platí $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a)$ a tedy

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(a) = \mathcal{U}_{\varepsilon_1}(a).$$

Stejně dokážeme pro redukovaná okolí.
ad (ii): Opět vzhledem k Větě 2.54 stačí dokázat případ, kdy a nebo b je nevlastní. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$. Za poloměr okolí bodu a si můžeme zvolit kladné číslo ε tak, aby $a + \varepsilon > 0$, a za poloměr okolí bodu ∞ zvolme

$$\delta = \frac{1}{a + \varepsilon}.$$

Pak totiž $a+\varepsilon = \frac{1}{\delta}$ a tedy $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ a $\mathcal{U}_\delta(\infty)$ jsou disjunktní. Podobnou úvahu můžeme provést v případě, že $a \in \mathbb{R}$ a $b = -\infty$. Nechť nyní $a = -\infty$, $b = \infty$. Pak z Definice 2.66 automaticky plyne $\mathcal{U}_\varepsilon(-\infty) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(\infty) = \emptyset$, ať už ε zvolíme jakkoliv. Nerovnost mezi prvky jednotlivých okolí plyne z uvedené konstrukce. $\square$

Poznámka 2.69

(a) Z Věty 2.68 vidíme, že se k okolím bodů můžeme chovat stejně, nezávisle na tom, zda jde o okolí bodů vlastních či nevlastních. V dalších kapitolách tohoto skripta toho budeme velmi využívat – podstatně se zkrátí důkazy spousty vět, protože nebýt tohoto jednotného značení, v důkazech by se musely vyšetřovat případy pro vlastní a nevlastní body zvlášť.

(b) V případě potřeby lze definovat jednostranná okolí nevlastních bodů takto: $\mathcal{U}^+(-\infty) = \mathcal{U}(-\infty)$, $\mathcal{R}^+(-\infty) = \mathcal{R}(-\infty)$, $\mathcal{U}^-(\infty) = \mathcal{U}(\infty)$ a $\mathcal{R}^-(\infty) = \mathcal{R}(\infty)$. Ostatní jednostranná okolí zjevně nemají smysl.

Kapitola 3

Posloupnosti reálných čísel

Ústředním pojmem matematické analýzy je pojem reálné funkce a její limity. Ten druhý pojem je poměrně komplikovaný na pochopení – podrobně se s ním seznámíme v kapitole 4. Abychom postupovali od jednoduššího ke složitějšímu, nejprve se budeme zabývat jedním speciálním typem reálné funkce reálné proměnné – budeme mu říkat *posloupnost reálných čísel*. Na něm si mimo jiné poprvé představíme pojem limity.

3.1 Posloupnost a její graf

Posloupnost reálných čísel je matematickým modelem pro „nekonečný uspořádaný seznam reálných čísel“, podrobněji:

- každá položka tohoto seznamu (budeme jí říkat *člen posloupnosti*) bude očíslovaná právě jedním přirozeným číslem (tzv. *indexem*) – posloupnost bude mít první člen, druhý člen, desátý člen, atd. (odtud ta „nekonečnost“),
- zaměníme-li hodnoty dvou různých členů, dostáváme jiný seznam (odtud ta „uspořádanost“).

Oblíbeným příkladem posloupnosti je třeba následující

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots,$$

kde je třeba dodat, že jsme vypsali pouze jejích prvních devět členů. Pokud nebude řečeno jinak, další členy takto zadané posloupnosti budou určeny podle pravidla, na které lze snadno přijít z již vypsaných členů. Např. zde jde o posloupnost, jejíž hodnota n-tého členu je rovna číslu $\frac{1}{n}$ (n je nějaké přirozené číslo – budeme mu říkat *index* a udává pořadí členu). Aby se předešlo nejasnostem, můžeme tuto posloupnost vyjádřit také takto:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

kde je jasné, že n-tý člen je roven zlomku $1/n$. Tedy např. druhý člen je $\frac{1}{2}$, desátý člen je $\frac{1}{10}$, atd.

Poznámka 3.1 Na střední škole se studenti setkají s pojmem konečné posloupnosti – tu lze chápat jako matematický model *konečného* seznamu reálných čísel. My se v tomto kurzu budeme zabývat výhradně nekonečnými posloupnosti – právě kvůli oné „nekonečnosti“; tedy slovo „nekonečný“ budeme vynechávat. Budou nás zajímat jevy, které v konečném případě nenastanou. Zejména nás bude zajímat, co se děje s členy posloupnostmi pro rostoucí index – přibližují se k nějaké hodnotě, či ne? Pokud ano, jak to přesně vyjádřit, jak tyto hodnoty spočítat, kolik jich může být, a k čemu všemu by to mohlo být dobré?

Nyní přistupme k formální definici posloupnosti.

Definice 3.2 *Posloupností reálných čísel* rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Je-li a posloupnost, pak obraz čísla $n \in \mathbb{N}$ v tomto zobrazení (tj. číslo $a(n)$) značíme symbolem a_n a nazýváme *n-tý člen posloupnosti*; číslu n (což je vlastně prvek z definičního oboru posloupnosti) říkáme *index* tohoto členu. Posloupnost se místo jednoho písmena a zapisuje prostřednictvím svých členů, tzn. např $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo jen $\{a_n\}$) či

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Konkrétní posloupnost bývá zadána různými způsoby. Jednou z možností je zadání *výčtem jejích členů*, s čímž jsme se již setkali hned na začátku kapitoly, např.

$$1, 2, 5, 8, 10, 40, 5, \dots$$

kde první člen je číslo 1, třetí člen je číslo 5, atd. Nevýhodou tohoto zadání je fakt, že nevíme jaké členy dál následují (to je nepříjemné, protože na těch zbývajících členech bude záležet nejvíce). Proto je tento způsob vhodný v případě, že ze zadaných čísel je možné usoudit, jak budou vypadat další členy. Uvažujme tuto posloupnost:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$$

Odtud je asi jasné, že členy této posloupnosti tvoří skupiny zlomků o stejném jmenovateli s rostoucím čitatelem. Tedy další členy by měly být 4/5, 1/6, 2/6, 3/6, atd.

Uvažujme dále posloupnost

$$1, -1, 1, -1, \dots,$$

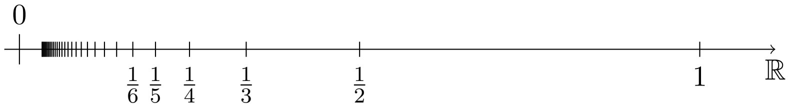
kde vidíme mnohem jednodušší pravidlo pro určení dalších členů: členy s lichým indexem jsou rovny 1 a členy se sudým indexem jsou rovny -1. To nás může přivést k myšlence, že n-tý člen této posloupnosti je ve tvaru $(-1)^n$. Tím se dostáváme k dalšímu (nejpoužívanějšímu) způsobu zápisu posloupnosti – *předpisem pro n-tý člen.* Místo vypisování jednotlivých členů posloupnosti můžeme (pokud to jde jednoduše) vypsat pouze vzorec k výpočtu n-tého členu posloupnosti. Např. posledně zmíněná posloupnost může být zadána takto

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Tento způsob je úspornější, ale nemusí vždy dávat dobrou představu o posloupnosti jako zadání výčtem. Proto se někdy používá způsob, ve kterém se kombinují oba typy. Posledně zmíněnou posloupnost lze zapsat takto

$$-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots.$$

Tento způsob kombinuje přesnost a přehlednost s dobrou představou o členech posloupnosti.



Obrázek 3.1: Členy posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Dalším používaným způsobem jak vyjádřit danou posloupnost je *rekurentní zadání*. V tomto případě je zadáno prvních pár členů společně s pravidlem, pomocí kterého vypočítáme hodnotu členu posloupnosti v závislosti na několika předchozích. Například posloupnost

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

lze rekurentně zadat třeba takto

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -a_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Proč? První člen je přímo zadán, je roven 1. Druhý člen vypočteme z předpisu $a_{n+1} = -a_n$, kde za n dosadíme číslo 1. Dostaneme $a_2 = a_{1+1} = -a_1 = -1$. Třetí člen opět vypočteme dosazením do tohoto vzorce pro $n = 2$, tzn. $a_3 = a_{2+1} = -a_2 = -(-1) = 1$, a takto pokračujeme dále. Nevýhoda tohoto způsobu spočívá v tom, že chceme-li spočítat hodnotu n-tého členu posloupnosti, je potřeba nejprve určit členy předchozí.

Příklad 3.3 Velmi známou posloupností je posloupnost Fibonacciho. Jde o posloupnost, ke které došel Leonard Pisánský (známý jako Fibonacci) v 13. století při popisu vývoje populace králíků za ideálních podmínek (n-tý člen posloupnosti představuje počet párů králíků v n-tém roce). Tato posloupnost se nejčastěji zadává rekurentně:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Snadno vypočítáme několik prvních členů této posloupnosti:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Fibonacciho posloupnost lze zadat i pomocí předpisu, a to

$$\left\{ \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Nevěříte? Ověřte pro prvních pár členů! Na tomto příkladu je pěkně vidět, že někdy je rekurentní zadání lepší (mnohem jednodušší) než předpisem.

Jak si danou posloupnost dobře představit? Nejlépe poslouží vhodný obrázek. Můžeme si na reálnou přímku vykreslit členy dané posloupnosti, např. členy posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ lze zobrazit jako na Obrázku 3.1. Toto zobrazení nám ale nevyjádří pořadí členů. To bychom mohli vylepšit tak jako na Obrázku 3.2. Tento způsob budeme využívat v případech, kdy konkrétní hodnoty nejsou důležité. Mnohem přehlednější způsob načrtnutí členů posloupnosti je pomocí *grafu posloupnosti*.

Poznámka 3.4 Protože posloupnost je speciální typ zobrazení, máme již automaticky i pojem grafu posloupnosti. *Grafem posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je relace

$$\operatorname{graf} a_n = \{(n, a_n) \; : \; n \in \mathbb{N}\},$$

tedy množina všech uspořádaných dvojic (*index*, *člen posloupnosti*).

Jestliže jsme si vypočítali prvních pár členů dané posloupnosti, je velmi výhodné nakreslit si její graf. Má to ovšem stejnou nevýhodu jako zapsání výčtem – nejsme schopni zobrazit všechny členy posloupnosti (vlastně nikdy nenakreslíme graf celý, pouze jeho část). Nicméně je vřele doporučováno kreslit si grafy posloupností kvůli lepší představě.

Příklad 3.5 Nakreslete graf posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Graf posloupnosti vykreslíme tak, že na horizontální osu vynášíme přirozená čísla (body definičního oboru posloupnosti) a na vertikální osu reálná čísla (funkční hodnoty posloupnosti, tedy členy posloupnosti) – viz Obrázek 3.3. ◯

3.2 Monotónní a ohraničené posloupnosti

U posloupností nás hodně zajímá to, jak se vyvíjejí členy posloupnosti s rostoucí indexem. Nejprve nás bude zajímat, zda je tento vývoj „stejným směrem“ – tzv. monotónní. A protože členů posloupnosti je nekonečně mnoho, bude nás také zajímat, zda její členy tvoří omezenou množinu.

Definice 3.6 Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

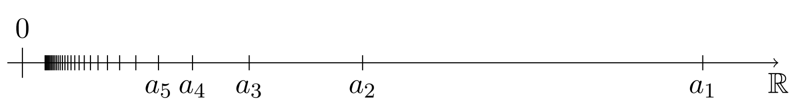
- *rostoucí*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n < a_{n+1}$,
- *klesající*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n > a_{n+1}$,
- *neklesající*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq a_{n+1}$,
- *nerostoucí*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq a_{n+1}$.

Souhrnně se takovým posloupnostem říká *monotónní* posloupnosti; posloupnostem rostoucím a klesajícím se navíc říká *ryze monotónní*.

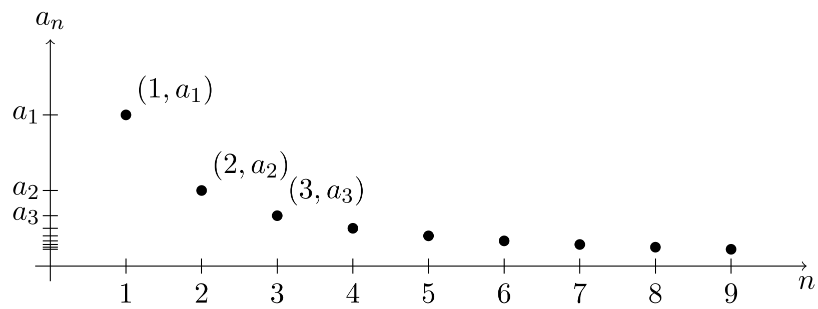
Poznámka 3.7

- Pojem monotónní posloupnosti je velmi intuitivní. Například rostoucí posloupnost je podle definice taková, jejíž každý člen je větší než předcházející.
- Na otázku monotónnosti lze jednoduše odpovědět pohledem na graf posloupnosti. Podíváme-li se na Obrázek 3.3, můžeme odhadnout, že daná posloupnost je klesající. Můžeme ale jen hádat. Důvod je pořád stejný: Nikdy nenakreslíme graf celý, jen jeho část. Zdá-li se nám podle části grafu posloupnost třeba rostoucí, nemáme úplnou jistotu, že tento trend bude zachován, protože třeba od stého členu může posloupnost „začít klesat“. Třeba graf posloupnosti

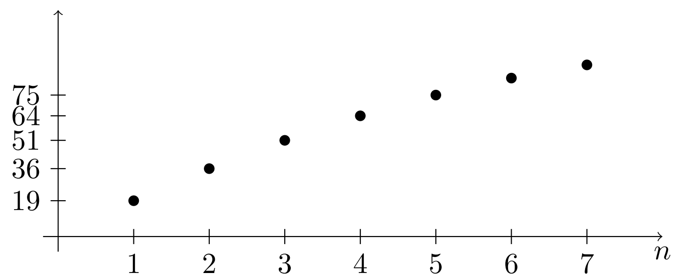
$$\{n(20-n)\}_{n=1}^{\infty}$$



Obrázek 3.2: Členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.



Obrázek 3.3: Graf posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.



Obrázek 3.4: Graf posloupnosti $\{n(20-n)\}_{n=1}^{\infty}$.

můžeme vidět na Obrázku 3.4. Z něj bychom mohli mylně usoudit, že jde o rostoucí posloupnost kladných čísel. Ale třeba její dvacátý člen je nulový. Tedy rostoucí tato posloupnost být rozhodně nemůže. Fakt, zda posloupnost je či není monotónní, je vždy potřeba dokázat podle definice – viz Příklad 3.8.

Příklad 3.8 Vyšetřete monotónnost následujících posloupností:

(a) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, (b) $\left\{\sqrt[n]{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, (c) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Nejprve je třeba rozhodnout, jaká by posloupnost mohla být – podle prvních pár členů této posloupnosti. Pokud se budou členy s rostoucím indexem zvětšovat, má smysl pokusit se dokázat, že posloupnost je neklesající (nebo dokonce rostoucí). Jestliže např. zjistíme, že „nejprve členy rostou a pak klesají“, nemůže jít o monotónní posloupnost.
ad (a): Spočtěme nejprve prvních pár členů. Platí

$$\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad : \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \ldots$$

Odtud by se mohlo jevit, že posloupnost by mohla být nerostoucí (nikoliv klesající – a to kvůli rovnosti prvních dvou členů). Dokažme tedy, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{n}{2^n}.$$

Vynásobením této nerovnosti výrazem 2^{n+1} a po dalších ekvivalentních úpravách dostáváme nerovnost $n \geq 1$. Tato nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, tedy posloupnost je skutečně nerostoucí.

ad (b): Vypočítat prvních pár členů bez výpočetní techniky by bylo obtížnější. První člen je zřejmě roven 3 a druhý člen je roven číslu jehož druhá mocnina je rovna 3. To bude zřejmě číslo menší než 3. Třetí člen by mohl být ještě menší. Ověřme tedy naši hypotézu, že posloupnost je klesající. Stačí ověřit, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[n+1]{3} < \sqrt[n]{3}.$$

Obě strany této nerovnosti můžeme například umocnit na $n(n+1)$, následně podělit kladným výrazem 3^n a dostáváme zřejmě pravdivou nerovnost $1 < 3$ (nebo místo umocňování jednoduše zlogaritmujeme). Ta vskutku platí pro všechna přirozená n (n se ani na jedné straně totiž nevyskytuje), tedy posloupnost je klesající.
ad (c): Vypočtěme nejprve prvních pár členů

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} \; : \qquad -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

Po výpočtu prvních dvou členů této posloupnosti lze usoudit, že pokud je posloupnost monotónní, může být jedině nerostoucí (dokonce i klesající) – tzn. splňuje podmínku $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ovšem po výpočtu třetího členu docházíme k závěru, že ani to neplatí, protože nerovnost není splněna již pro $n = 2$. Tedy posloupnost není monotónní. ◯

Další důležitou vlastností posloupnosti je její ohraničenost. Tu definujeme jakožto ohraničenost množiny jejích členů.

Definice 3.9 Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *zdola ohraničená/shora ohraničená/ohraničená/neohraničená*, je-li takový její obor hodnot (tzn. množina jejích členů). Posloupnost se nazývá *zdola neohraničená*, není-li zdola ohraničená. Posloupnost se nazývá *shora neohraničená*, není-li shora ohraničená (místo slova „ohraničená“ lze použít slovo „omezená“).

Supremum/infimum posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujeme jako supremum/infimum množiny jejích členů, značíme $\sup a_n / \inf a_n$. Existuje-li největší/nejmenší prvek množiny členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, říkáme mu *největší/nejmenší člen posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme $\max a_n / \min a_n$.

Příklad 3.10

1. Posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ má množinu svých členů rovnu $\{1, 2, \ldots\}$ tedy množině všech přirozených čísel. Tato množina je shora neohraničená. Tedy podle Definice 3.9 je i posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená shora. Dále, protože $\mathbb{N}$ je ohraničená zdola (např. číslem 1), je tato posloupnost ohraničená zdola (rovněž číslem 1). Zřejmě tedy platí, že $\max n$ neexistuje a
$$\inf n = \min n = 1, \quad \sup n = \infty.$$

2. Posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, protože množina jejích prvků $\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ je ohraničená (zdola číslem 0 a shora číslem 1). Platí, že $\min \frac{1}{n}$ neexistuje,
$$\sup \frac{1}{n} = \max \frac{1}{n} = 1, \quad \inf \frac{1}{n} = 0.$$

3. Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dvouprvkovou množinu členů, konkrétně je to množina $\{1, -1\}$. Ta je evidentně ohraničná, takže to samé můžeme říct i o posloupnosti. Zřejmě
$$\max(-1)^n = \sup(-1)^n = 1, \quad \min(-1)^n = \inf(-1)^n = -1.$$

4. Posloupnost $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená zdola i shora. Tedy $\min(-1)^n n$ ani $\max(-1)^n n$ neexistují a
$$\sup(-1)^n n = \infty, \quad \inf(-1)^n n = -\infty.$$
Ověřte!

Definice 3.11 Posloupnosti, jejíž obor hodnot je jednoprvková množina, se říká *konstantní* (nebo *stacionární*).

Poznámka 3.12 Mělo by být jasné, že konstantní posloupnost není ani rostoucí ani klesající, ale přitom je neklesající a zároveň nerostoucí. Dále, konstantní posloupnost je ohraničená.

Cvičení 3.13

1. Vypočtěte první čtyři členy Fibonacciho posloupnosti z Příkladu 3.3 pomocí jejího předpisu.
2. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ tak, že
$$\forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq K.$$
3. Dokažte, že každá nerostoucí posloupnost je ohraničená shora a každá neklesající posloupnost je ohraničená zdola!
4. Vyšetřete ohraničenost a monotónnost následujících posloupností:

   (a) $\left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$,
   (b) $\{\sqrt[3]{n}\}_{n=1}^{\infty}$,
   (c) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,
   (d) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$,
   (e) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$,
   (f) $\{n^\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ vzhledem k $\alpha \in \mathbb{R}$,
   (g) $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ vzhledem k $q \in \mathbb{R}$,
   (h) $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$ vzhledem k $a > 0$.

3.3 Definice limity posloupnosti

Limita posloupnosti je ústředním pojmem matematické analýzy. Pochopení tohoto pojmu je zásadní, ovšem pro začátečníka ne zrovna nejjednodušší. Důvodem je také to, že definice je ve formě testu, kde se vyskytuje výrok se třemi za sebou jdoucími kvantifikátory odlišného typu, což začátečník velmi těžko udrží v hlavě současně. Tato zátěž zde bude zmírněna definováním pomocného pojmu, který umožní proces pochopení rozdělit do dvou snáze zvládnutelných kroků.

Definice 3.14 Nechť $V(n)$ je výroková funkce s volnou proměnnou $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že „$V(n)$ platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$“ (zkráceně: „pro s.v.“) neboli „$V(n)$ platí pro dostatečně velká n“, jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí výrok $V(n)$, tzn.
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ : \ V(n).$$

Je to tedy jakási forma obecného kvantifikátoru pro přirozená čísla. K jeho pochopení je vhodné věnovat mu nějaký čas.

Příklad 3.15 Dokažte, že platí

$$2^n > 10 \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Již graf posloupnosti $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ nás může utvrdit v tom, že toto tvrzení je pravdivé (kreslete!). Dokažme to. Snadno lze spočítat, že $2^4 = 16 > 10$, tzn. naše nerovnost platí pro alespoň $n = 4$. Protože $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ je také rostoucí (dokažte!), pro všechna $n \geq 4$ platí

$$2^n \geq 2^4 > 10,$$

tzn. nerovnost $2^n > 10$ platí počínaje číslem $n_0 = 4$. Navíc, protože $2^3 = 8 \leq 10$, číslo čtyři je nejmenší přirozené číslo, které lze za n_0 zvolit. To ale pro nás není důležité, podstatná je *pouhá existence* takového n_0! ◯

Lemma 3.16. *Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak $n > a$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Podle Archimedova axiomu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > a$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ zřejmě podle tranzitivity nerovnosti také platí $n > a$. □

Příklad 3.17 Dokažte, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ platí

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Nerovnost v dokazovaném tvrzení je pro každé $n \in \mathbb{N}$ ekvivalentní s nerovností

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ta podle Lemmatu 3.16 platí pro s.v. $n \in \mathbb{N}$ (dosadíme-li $a = 1/\varepsilon$). ◯

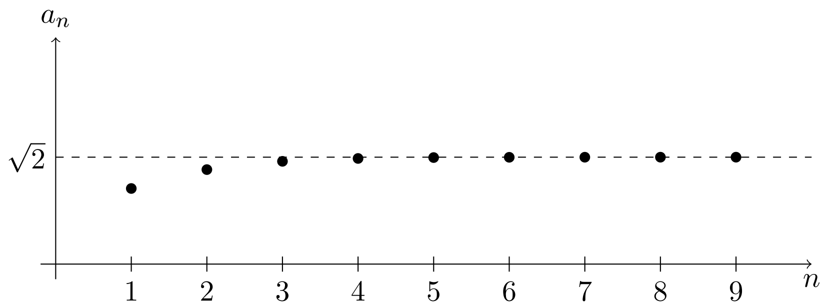
Příklad 3.18 Zjistěte, zda je pravdivý výrok „pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že n je sudé číslo“.

Řešení. Předpokládejme, že výrok je pravdivý a n_0 je index z Definice 3.14. Pak n_0 je sudé nebo není sudé. Pokud by n_0 bylo sudé, pak výrok „$n_0 + 1$ je sudé číslo“ není pravdivý a pokud n_0 by bylo liché, pak zase výrok „n_0 je sudé číslo“ není pravdivý. Dostáváme se tak do sporu s předpokladem. Výrok tedy není pravdivý. ◯

Cvičení 3.19 Zjistěte, které z nerovností platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ (v kladném případě určete n_0 z Definice 3.14):

(a) $\ln n > 10$, (b) $\mathrm{e}^n < 5$, (c) $n! > 1000$.

Nyní se pojďme konečně podívat na pojem *limity posloupnosti*. Souvisí především s vývojem hodnot členů posloupnosti s čím dál větším indexem. A proč? Důvodů je celá řada. Za všechny uveďme tento jednoduchý příklad.



Obrázek 3.5: Graf posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladu 3.20.

Příklad 3.20 Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanou rekurentně:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} + a_n - \frac{1}{4}a_n^2, \; n \in \mathbb{N}.$$

Vypočtěme pár prvních členů (zaokrouhlené na první 4 místa za desetinnou tečkou):

$$1, 1.25, 1.3594, 1.3974, 1.4092, 1.4127, 1.4138, 1.4141, 1.4142, 1.4142, \ldots$$

Vidíme, že devátý a desátý člen vypadají stejně, a kdybychom vypsali další, zjistili bychom, že jsou úplně stejná. To platí samozřejmě proto, že nevidíme další platné číslice. Kdybychom si vypsali tato čísla s více desetinnými místy, zjistíme, že od 30-tého členu mají prvky této posloupnost hodnoty cifer na prvních patnácti desetinných místech tyto:

$$a_n \doteq 1.414213562373095, \quad n \geq 30.$$

Umocníme-li třicátý člen na druhou, dostáváme

$$a_{30}^2 \doteq 1.9999999999999996.$$

Není to náhoda. Zadání naší posloupností lze chápat jako způsob, pomocí kterého počítáme přibližně číslo $\sqrt{2}$ a tedy číslo

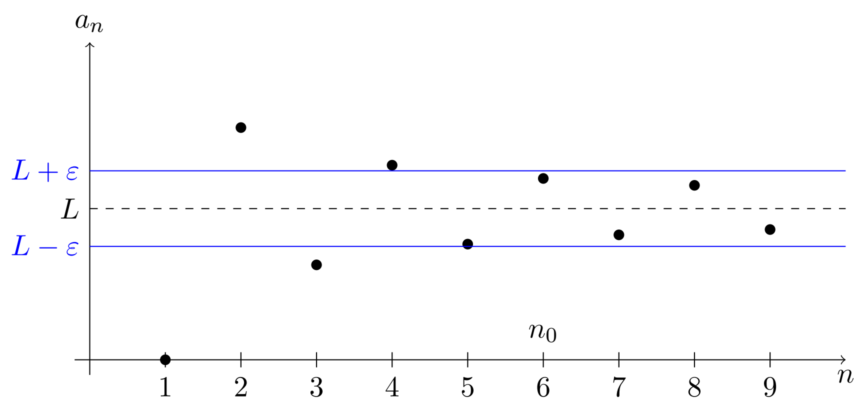
$$|a_n - \sqrt{2}|$$

lze chápat jako velikost chyby, které se dopouštíme – čím menší je toto číslo, tím větší je přesnost. V tomto případě tvrdíme, že se členy této posloupnosti „neomezeně přibližují“ k přesné hodnotě $\sqrt{2}$. Co se tím myslí přesně?

Neomezeným přibližováním členů a_n k $\sqrt{2}$ rozumíme fakt, že když si zvolíme libovolně malé kladné číslo ε, pak n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má od $\sqrt{2}$ vzdálenost menší než předepsané ε, a to „pro všechna n dostatečně velká“, což přesně vyjadřujeme kvantifikátorem „pro s.v. $n \in \mathbb{N}$“. Tedy celkově: pro každé $\varepsilon > 0$ platí $|a_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$. Graf posloupnosti společně „s její limitou“ najdete na Obrázku 3.5. ◯

Nyní konečně přistupme k samotné definici limity posloupnosti – pro jednoduchost nejprve uvedeme *vlastní* limitu. Půjde o hodnotu (reálné číslo), ke kterému se členy posloupnosti s rostoucím indexem *neomezeně přibližují.*

Zobecníme tedy úvahy z Příkladu 3.20 takto: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se neomezeně přibližuje k reálnému číslu L právě tehdy, když pro libovolně malé kladné ε platí, že vzdálenost a_n od L je menší než ε pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Číslu L budeme říkat limita posloupnosti.



Obrázek 3.6: Definice vlastní limity.

Definice 3.21 Řekneme, že $L \in \mathbb{R}$ je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ platí nerovnost $|a_n - L| < \varepsilon$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Hodnotu limity posloupnosti (tzn. číslo L) budeme značit symbolem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. O posloupnosti, která má vlastní limitu, říkáme, že je *konvergentní*.

Poznámka 3.22

- Okamžitě z Definice 3.21 plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$ (ověřte!) To by nás v souvislosti s motivačními úvahami nemuselo nijak překvapit.
- Bez pojmu „s.v. $n \in \mathbb{N}$" lze výrok z definice limity zapsat takto:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ :\ |a_n - L| < \varepsilon.$$

  což čteme „pro každé kladné reálné ε existuje přirozené n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna n_0, platí $|a_n - L| < \varepsilon$". Tento způsob zápisu budeme používat v konkrétních příkladech. Tento výrok je třeba pochopit – zejména umět nakreslit na obrázku (a ve správném pořadí) – viz Obrázek 3.6.
- Při motivování pojmu limita jsme uvažovali příklady posloupností, jejichž členy nenabyly hodnoty své limity. To ovšem neznamená, že k tomu dojít nemůže. Uvažujme například konstantní posloupnost $\{1\}_{n=1}^{\infty}$, která má všechny členy rovny číslu 1. Limita takovéto posloupnosti existuje a je rovna číslu 1 – viz Příklad 3.34.
- Existují i posloupnosti, které nemají limitu (např. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$).

Příklad 3.23 Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Řešení. Dokažme nyní, že náš tip na hodnotu limity posloupnosti $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ souhlasí s Definicí 3.21. Budeme tedy dokazovat pravdivost výroku: pro každé $\varepsilon > 0$ platí nerovnost

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

To jsme již ovšem dokázali v Příkladu 3.17. ◯

Příklad 3.24 Dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

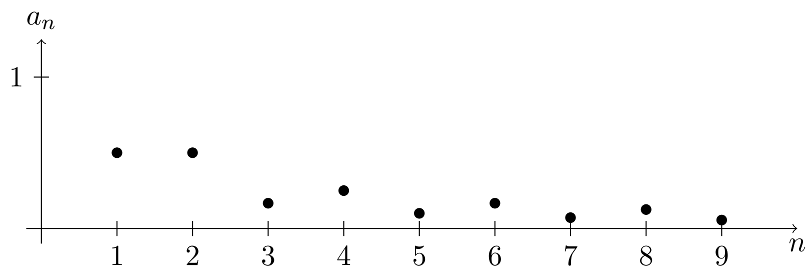
Řešení. Ať už vypíšeme prvních pár členů nebo načrtneme graf posloupnosti, vidíme, že by dokazovaná rovnost platit měla. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Máme dokázat, že nerovnost
$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$
platí pro s.v. $n \in \mathbb{N}$. Poslední nerovnost si ekvivalentními úpravami lze přepsat (proveďte) na
$$n > -\log_2 \varepsilon.$$
Tato nerovnost ovšem pro s.v. $n \in \mathbb{N}$ platí podle Lemmatu 3.16, kde stačí položit $a = -\log_2 \varepsilon$. ○

Příklad 3.25 Dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Řešení. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Máme dokázat, že nerovnost
$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
platí pro s.v. $n \in \mathbb{N}$. Protože $|(-1)^n/n| = 1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, výrok je pravdivý (podle Příkladu 3.23). ○

Příklad 3.26 Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná předpisem
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{2n} & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$
má limitu rovnu nule.

Řešení. Posloupnost je zadaná trochu jinak než jsme zvyklí, proto si pro jistotu vypišme prvních několik členů:
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}, \frac{1}{16}, \dots$$
Odtud vidíme, že posloupnost není klesající ani nerostoucí, ale celkově se členy čím dál přibližují k nule – viz Obrázek 3.7. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle Archimedova axiomu (viz Příklad 3.23) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$
Pak pro každé $n \geq n_0$ platí jedna z možností:
(a) n je sudé: Pak
$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$



Obrázek 3.7: Graf posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladu 3.26.

(b) n je liché: Pak

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{2n} - 0\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

V obou případech dostáváme, že $|a_n - 0| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$. ○

Nyní uvažujme posloupnost $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$. Jde o posloupnost rostoucí, přitom její růst nenaznačuje, že by se členy s rostoucím indexem přibližovaly k nějakému reálnému číslu, ale naopak čím dál se zvětšují – a to *neomezeně*. Podobně členy posloupnosti $\{-2^n\}_{n=1}^{\infty}$ se s rostoucím indexem neomezeně zmenšují, přitom tato posloupnost asi také nemá vlastní limitu. Podobně, jako tomu bylo u vlastní limity, chceme přesně vyjádřit fakt, že se členy posloupnosti s rostoucím indexem *neomezeně zvětšují* resp. *neomezeně zmenšují*. Inspirováni Definicí 3.21 zkusme přesně zformulovat, co myslíme větou „členy posloupnosti se neomezeně zvětšují při rostoucím indexu“. Opět můžeme vzít nějakou posloupnost, která tuto vlastnost nemá, např. $\{1 - 1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Snadno dokážeme, že jde o posloupnost rostoucí, ale přesto se její členy neomezeně nezvětšují – platí totiž $1 - 1/n < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podobnou úvahu lze provést pro posloupnost $\{2 - 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ a další podobné. V těchto případech vždy najdeme horní mez, kterou posloupnost nepřekročí. Naopak, členy posloupnosti $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ se budou s rostoucím indexem neomezeně zvětšovat: pokud vezmeme jakkoliv velké číslo, musí členy dané posloupnosti od jistého indexu být větší než toto číslo. To lze zapsat jako: „pro každé $K \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $a_n > K$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$“. K podobnému tvrzení docházíme při neomezeném zmenšování.

Definice 3.27 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.

(a) Řekneme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastní limitu* ∞, jestliže pro každé $K \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $a_n > K$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, neboli

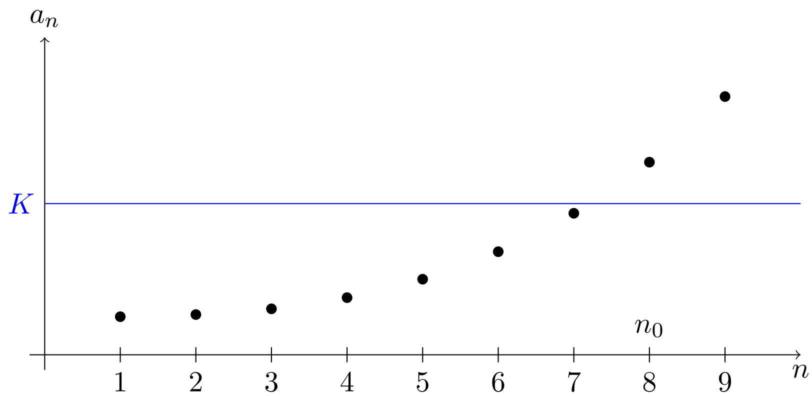
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n > K. \tag{3.1}$$

Tento fakt značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ a říkáme, že posloupnost *diverguje k* ∞.

(b) Řekneme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastní limitu* $-\infty$, jestliže pro každé $K \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $a_n < K$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, neboli

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n < K.$$

Tento fakt značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ a říkáme, že posloupnost *diverguje k* $-\infty$.



Obrázek 3.8: Definice nevlastní limity ∞

.

Poznámka 3.28 Podobně jako u vlastní limity, je potřeba zcela pochopit výroky v Definici 3.27. Např. výrok (3.1) lze ilustrovat Obrázkem 3.8.

Příklad 3.29 Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Řešení. Podle Definice 3.27 máme ukázat, že k libovolně zvolenému $K \in \mathbb{R}$ platí

$$2^n > K \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Nechť K je nějaké reálné číslo. Naše strategie bude stejná jako při dokazování limit vlastních. Ekvivalentními úpravami lze převést posledně zmíněnou nerovnost na nerovnost ve tvaru

$$n > \dots$$

(přitom na pravé straně této nerovnosti se n samozřejmě *nevyskytuje*) a poté použít Lemma 3.16. K tomu cíli nás možná hned napadne zlogaritmovat nerovnost o základu 2, čímž dostaneme nerovnost v požadovaném tvaru $n > \log_2 K$. Nesmíme však zapomenout na to, že K je libovolné reálné číslo, a přitom logaritmovat můžeme pouze kladná čísla. Rozdělme náš důkaz na dva případy:

- $K > 0$: V tomto případě je nerovnost $2^n > K$ ekvivalentní s $n > \log_2 K$, která je podle Lemmatu 3.16 splněna pro s.v. $n \in \mathbb{N}$.
- $K \leq 0$: Protože 2^n je vždy kladné číslo, pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n > 0 \geq K$, tedy požadovaná nerovnost je splněna dokonce pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tím je tvrzení dokázáno pro všechny možné hodnoty K. ◯

Příklad 3.30 Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} n & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ 2n & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

má limitu ∞.

Řešení. Vypišme si prvních pár členů této posloupnosti:

$$2, 2, 6, 4, 10, 6, 14, 8, 16, \dots$$

Vidíme, že posloupnost rozhodně není rostoucí, ale „má rostoucí tendenci“ – dokonce bychom i mohli vidět, že by členy měly růst nade všechny meze. Dokažme to. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Pak podle Archimedova axiomu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_0 > K.$$

Pro každé $n \geq n_0$ platí jedna z možností:
(a) n je sudé: Pak

$$a_n = n \geq n_0 > K.$$

(b) n je liché: Pak

$$a_n = 2n \geq n \geq n_0 > K.$$

V obou případech dostáváme, že $a_n > K$ pro všechna $n \geq n_0$. ○

Jak jsme viděli, máme dva typy limity posloupnosti – vlastní (hodnota limity je reálné číslo) a nevlastní (hodnota limity je ∞ nebo $-\infty$). Přestože tyto dva typy budeme často rozlišovat, je vhodné definovat limitu posloupnosti společnou definicí, tzn. definicí, která v sobě bude obsahovat oba dva typy jako speciální případy. K tomu účelu se nám bude hodit pojem okolí bodu z $\mathbb{R}^*$ – viz Definice 2.50 a 2.66.

Definice 3.31 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $L \in \mathbb{R}^*$ je limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé okolí $\mathcal{U}(L)$ platí

$$a_n \in \mathcal{U}(L) \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 3.32 Je potřeba se přesvědčit, že pojem limity z Definic 3.21 a 3.27 jsou skutečně speciálními případy pojmu limity z Definice 3.31. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a L je její limita podle Definice 3.31.

- Nechť $L \in \mathbb{R}$. To znamená, že „pro každé okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ platí $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$“, neboli

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n - L| < \varepsilon.$$

  To je ale přesně výrok z Definice 3.21.

- Nechť $L = \infty$. To znamená, že „pro každé okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\infty)$ platí $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(\infty) = (1/\varepsilon, \infty)$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$“, neboli

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq n_0 : \ a_n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

  Tento výrok není stejný jako (3.1). Dokažme ale, že tyto výroky jsou ekvivalentní, tzn. že jeden je pravdivý právě tehdy, když druhý je pravdivý, čímž dokážeme, že Definice 3.27 je speciálním případem Definice 3.31 pro $L = \infty$.

  Nechť platí (3.1). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$ libovolně. Položíme-li $K = 1/\varepsilon$ pak z (3.1) dostáváme, že

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 : \ a_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

tzn. platí (3.2). Naopak, nechť platí (3.2). Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Je-li $K > 0$, pak položíme-li $\varepsilon = 1/K$, platí pro $n \geq n_0$ nerovnost

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} = K.$$

Pokud $K \leq 0$, pak položíme-li $\varepsilon = 1$, platí pro $n \geq n_0$ nerovnosti

$$a_n > 1 > K.$$

- Případ $L = -\infty$ se ověří podobně. Proveďte!
- V příkladech a důkazech budeme používat vždy takovou definici limity, která bude pro nás nejvýhodnější.

Poznámka 3.33 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $L \in \mathbb{R}^*$. Již víme, co znamená $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Co ale znamená negace této rovnosti, tzn.

$$\neg \left(\lim_{n\to\infty} a_n = L\right)?$$

K takové negaci můžeme dojít při důkazu sporem tvrzení, ve kterém se vyskytuje rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Hned se nabízí nerovnost

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq L,$$

ale ta je trochu zavádějící, protože to vypadá, že mluvíme o tom, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se nerovná něčemu, přitom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nemusí vůbec existovat. Tedy výrok $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ bychom měli chápat jako konjunkci: „existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$“ a současně „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$“. Negace takové konjunkce je pak (díky de Morganovu pravidlu) správně výrok: Buď „neexistuje limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$“ nebo „existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ale není rovna L“.

Nicméně, pokud chceme znegovat výrok „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$“, jde o negaci výroku v Definici 3.31, tzn.

$$\exists \mathcal{U}_\varepsilon(L)\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ :\ a_n \notin \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

Závěrem dodejme, že Definice 3.31 je velmi výhodná v tom, že lze *jediným* způsobem charakterizovat vlastní i nevlastní limitu. To oceníme např. v důkazu Věty 3.35, který je díky této definici relativně krátký. V opačném případě bychom museli uvažovat několik speciálních příkladů, což značně důkaz prodlouží (i když tento pracnější způsob může čtenáři dát lepší vhled do důkazu). Pokud ale dokazujeme o dané posloupnosti, že má (danou) konkrétní limitu, dokazujeme pravdivost výroků z Definic 3.21 a 3.27. Nutné je tedy znát všechny tři definice. Tato fakta budeme ilustrovat na následujícím příkladu, ve kterém uvedeme limity některých jednoduchých ale důležitých posloupností.

Příklad 3.34 Dokažte, že pro $\alpha, q, a \in \mathbb{R}$ platí

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a = a,$

(b) $\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{pro } \alpha > 0, \\ 1 & \text{pro } \alpha = 0, \\ 0 & \text{pro } \alpha < 0, \end{cases}$

(c) $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{pro } q > 1, \\ 1 & \text{pro } q = 1, \\ 0 & \text{pro } |q| < 1. \end{cases}$

Řešení. ad (a): Dokažme nejprve, že limita konstantní funkce je rovna členům této posloupnosti. Máme dokázat, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ :\ |a - a| < \varepsilon.$$

Nerovnost $|a - a| < \varepsilon$ je ale zřejmě pro kladné ε pravdivá, tedy je pravdivý celý výrok.
ad (b): Máme dokázat, že limita posloupnosti

$$\{n^\alpha\}_{n=1}^\infty$$

vzhledem k parametrům $\alpha \in \mathbb{R}$ má danou hodnotu. V Příkladu 3.23 jsme dokázali tvrzení pro $\alpha = -1$. Co ale další hodnoty parametrů.

Než se pustíme do dokazování, zamysleme se nad tím, jak jsme k hodnotám limit přišli? Uvažujme například posloupnost $\left\{n^2\right\}_{n=1}^\infty$. Jejích prvních pár členů je

$$1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \ldots$$

Intuice podpořená nakreslením grafu této posloupnosti nás utvrdí v hypotéze, že

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,$$

protože n^2 je pro čím dál větší $n \in \mathbb{N}$ také čím dál větší a nevypadá to, že bychom našli nějaké reálné číslo, které by bylo větší než všechna čísla n^2. Můžeme také tušit (či doufat), že podobný průběh bude pro všechna ostatní $\alpha > 0$. Totiž z Poznámky 2.38 se dá snadno odvodit, že $\{n^\alpha\}_{n=1}^\infty$ je pro $\alpha > 0$ rostoucí. Dokažme, že

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \infty, \quad \text{pro } \alpha > 0.$$

K tomu použijme Definici 3.31, konkrétně dokážeme pravdivost výroku (3.2). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Máme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Protože $\alpha > 0$, z Poznámky 2.38 dostáváme, že poslední nerovnost je ekvivalentní s

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Tato nerovnost podle Lemmatu 3.16 platí pro s.v. $n \in \mathbb{N}$.

Podívejme se na případ $\alpha = 0$. Jde o posloupnost konstantní, tedy rovnost plyne z předchozí části příkladu.

Nechť $\alpha < 0$. Inspirováni případem $\alpha = -1$ můžeme sami odhadnout, že limita by měla být nulová. Dokažme to. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Máme dokázat, že

$$|n^\alpha - 0| < \varepsilon$$

pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$\frac{1}{n^{-\alpha}} = n^\alpha < \varepsilon.$$

Ekvivalentními úpravami lze dospět k následující nerovnosti

$$n^{-\alpha} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Protože $-\alpha > 0$, z Poznámky 2.38 dostáváme, že poslední nerovnost je ekvivalentní s

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Tato nerovnost podle Lemmatu 3.16 platí pro s.v. $n \in \mathbb{N}$.

ad (c): Dokažme, že pro $q > 1$ platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

Máme tedy dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$ platí

$$q^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zlogaritováním této nerovnosti (jde o ekvivalentní úpravu) máme

$$n > \log_q \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tato nerovnost podle Lemmatu 3.16 platí pro s.v. $n \in \mathbb{N}$.

Případ $q = 1$ je opět triviální, protože jde o konstantní posloupnost.

Nechť $q \in (-1, 1)$. Pokud $q = 0$, pak jde opět o konstantní posloupnost, výsledek je jasný. Nechť navíc $q \neq 0$. Dokažme, že

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Máme tedy dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$ platí

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

Zlogaritováním této nerovnosti (jde o ekvivalentní úpravu) máme

$$n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Všimněte si, že se změnilo znamení nerovnosti – to z toho důvodu, že logaritmus je o základu menším než 1. Tato nerovnost podle Lemmatu 3.16 platí pro s.v. $n \in \mathbb{N}$. ◯

3.4 Základní vlastnosti limity

V této části odpovíme zejména na následující otázky.

- Kolik limit může daná posloupnost mít?
- Jaký je vztah mezi ohraničeností posloupnosti a její konvergencí?
- Jak zjistíme, že daná posloupnost limitu má?

- Mají posloupnosti s většími členy větší limity?

Nejprve odpovíme na otázku počtu limit dané posloupnosti.

Věta 3.35. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť má posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě různé limity $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*$, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$ a $L_1 \neq L_2$. Pak podle Věty 2.68(ii) existuje okolí $\mathcal{U}(L_1)$ a okolí $\mathcal{U}(L_2)$ taková, že $\mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2) = \emptyset$. Podle Definice 3.31 pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \ :\ a_n \in \mathcal{U}(L_1)$$

a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \ :\ a_n \in \mathcal{U}(L_2).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak platí $a_{n_0} \in \mathcal{U}(L_1)$ a současně $a_{n_0} \in \mathcal{U}(L_2)$. To ale znamená, že $a_{n_0} \in \mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2)$, což je ve sporu s tím, že $\mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2)$ je prázdná množina. □

Tedy posloupnost nemá buď žádnou limitu nebo jen jednu. Jako příklad posloupnost, která nemá limitu, lze vzít $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ – viz Příklad 3.82.

Limita a ohraničenost

Věta 3.36. *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená. Posloupnost mající nevlastní limitu ∞ je shora neohraničená a zdola ohraničená. Posloupnost mající nevlastní limitu $-\infty$ je zdola neohraničená a shora ohraničená.*

Důkaz. Uvažujme konvergentní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Podle definice pak k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ — třeba pro $\varepsilon = 1$ — platí $|a_n - L| < 1$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, tzn. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|a_n - L| < 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ pak platí

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Dále, protože množina $\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$ je konečná, existuje její největší prvek – označme ho např. písmenem G, tzn.

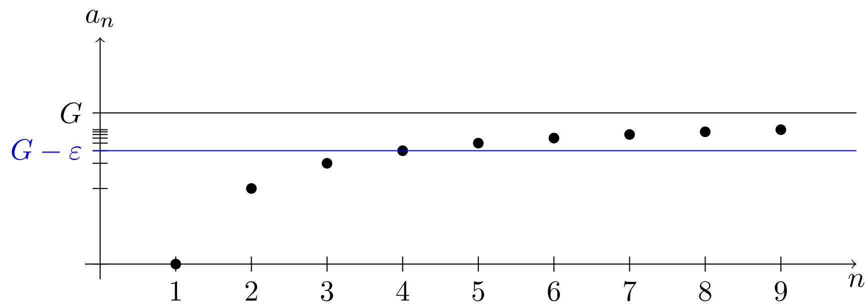
$$|a_n| \leq G \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots, n_0.$$

Celkově tedy můžeme říct, že

$$|a_n| \leq \max\{1 + |L|, G\} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Protože konstanta v poslední nerovnosti napravo nezávisí na n, dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Pak z definice nevlastní limity vyplývá že existuje n tak, že $a_n > K$, což znamená, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora neohraničná. Dokažme ohraničenost zdola. Opět podle definice (konkrétně pro $K = 0$) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n > 0$. Protože množina $\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ je konečná, má nejmenší prvek – označme ho písmenem g, tzn.

$$a_n \geq g \quad \text{pro } n = 1, \ldots, n_0.$$



Obrázek 3.9: Důkaz věty o limitě monotónní posloupnosti pro $G \in \mathbb{R}$.

Celkově tedy můžeme říct, že

$$a_n \geq \min\{0, g\} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Protože konstanta v poslední nerovnosti napravo nezávisí na n, dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola. $\square$

Poznámka 3.37 Opačné tvrzení neplatí, tzn. ne každá ohraničená posloupnost musí být nutně konvergentní. Jako příklad lze uvést posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, která je zřejmě ohraničená, ovšem nemá limitu – viz Příklad 3.82.

Věta 3.38. *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li taková posloupnost navíc ohraničená, pak je konvergentní. Platí*

- *je-li posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$.
- *je-li posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nerostoucí, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající. Označme $G = \sup a_n$. Jsou dvě možnosti: (a) $G \in \mathbb{R}$ nebo (b) $G = \infty$.
ad (a): Nechť nejprve $G = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Podle definice suprema posloupnosti pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0} > K$. Z monotónnosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne, že

$$K < a_{n_0} \leq a_n$$

pro všechna $n \geq n_0$. Tím jsme dokázali, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \sup a_n$.
ad (b): Nechť nyní $G \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle definice suprema posloupnosti pak

- $a_n \leq G$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a
- existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0} > G - \varepsilon$

(viz Obrázek 3.9, kde za n_0 lze vzít číslo 5 nebo větší). Z monotónnosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a předchozích výroků plyne, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$G - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq G < G + \varepsilon$$

neboli $|a_n - G| < \varepsilon$. $\square$

Věta 3.39 (o invarianci). *Nechť pro posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí*

$$a_n = b_n \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Pak:

(a) *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu právě tehdy, když má limitu posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Pokud jejich limity existují, rovnají se.*

(b) *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená právě tehdy, když je ohraničená posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel.
ad(a): Předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Máme dokázat, že pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. Zvolme libovolně okolí $\mathcal{U}(L)$. Podle Definice 3.31 pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_1$ platí $a_n \in \mathcal{U}(L)$. Podle předpokladu věty také existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_2$ platí $a_n = b_n$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak $b_n = a_n \in \mathcal{U}(L)$ pro všechna $n \geq n_0$, tzn. $b_n \in \mathcal{U}(L)$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.
ad (b): Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, tzn. existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$ (viz Cvičení 3.13(2)). Dále podle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n = a_n$ pro všechna $n \geq n_0$, tzn. pro všechna $n \geq n_0$ platí $|b_n| = |a_n| \leq K$. Protože množina $\{|b_1|, \dots, |b_{n_0}|\}$ je konečná, existuje její největší prvek, označme ho symbolem L. Pak

$$|b_n| \leq \max\{K, L\} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Protože konstanta v poslední nerovnosti napravo nezávisí na n, dokázali jsme, že posloupnost $\{b_n\}$ je ohraničená. $\square$

Poznámka 3.40 Věta 3.39 je velmi zajímavá. Říká, že prvních konečně mnoho členů posloupnosti nemá vliv na to, zda a jakou bude mít posloupnost limitu. To má celou řadu důsledků. Např. Věta 3.38 říká, že monotónní posloupnost má limitu. Ovšem posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí pouze, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ :\ a_n \leq a_{n+1},$$

předpoklady věty nesplňuje. Můžeme ovšem definovat pomocnou posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto:

$$b_n = \begin{cases} a_{n_0} & \text{pro } n = 1, \dots, n_0 - 1, \\ a_n & \text{pro } n \geq n_0. \end{cases}$$

Tato posloupnost už neklesající je, tedy limitu má a přitom $a_n = b_n$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 3.39 má limitu i posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, navíc stejnou jako $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Limita a nerovnosti

Nyní se podívejme na *monotónnost* limity. Někdy pracujeme se dvěma posloupnostmi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ o nichž víme, že mají limity a navíc platí, že $a_n \leq b_n$. Platí podobný vztah mezi jejich limitami? Následující věta odpoví kladně.

Věta 3.41. *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mají limity (vlastní či nevlastní). Pak*

(a) jestliže
$$a_n \leq b_n \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$
pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(b) jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *pak*
$$a_n < b_n \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*$.
ad (a): (sporem) Předpokládejme že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$\forall n \geq n_1 \; : \; a_n \leq b_n$$
a přitom $L_1 > L_2$. Pak podle Věty 2.68(ii) existují disjunktní okolí $\mathcal{U}(L_1)$ a $\mathcal{U}(L_2)$ taková, že platí
$$\forall x \in \mathcal{U}(L_1) \; \forall y \in \mathcal{U}(L_2) \; : \; x > y.$$
Podle předpokladu existují $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ takové že
$$\forall n \geq n_2 \; : \; a_n \in \mathcal{U}(L_1) \quad \text{a} \quad \forall n \geq n_3 \; : \; b_n \in \mathcal{U}(L_2).$$
Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Protože $n_0 \geq n_1$, pak
$$a_{n_0} \leq b_{n_0},$$
a protože $n_0 \geq n_2$ a současně $n_0 \geq n_3$ pak
$$a_{n_0} > b_{n_0}.$$
To je žádaný spor.
ad (b): Protože $L_1 < L_2$, pak podle Věty 2.68(ii) existují okolí $\mathcal{U}(L_1)$ a $\mathcal{U}(L_2)$ taková že platí
$$\forall x \in \mathcal{U}(L_1) \; \forall y \in \mathcal{U}(L_2) \; : \; x < y.$$
Podle definic limit L_1 a L_2, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_1 \; : \; a_n \in \mathcal{U}(L_1)$$
a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_2 \; : \; b_n \in \mathcal{U}(L_2)$$
Položíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$. □

Poznámka 3.42 Důležité je dodat, že platí-li ve Větě 3.41(a) ostré nerovnosti $a_n < b_n$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, nelze z toho usuzovat, že platí také ostré nerovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Uvažujme např. posloupnosti $\{0\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Zřejmě platí $0 < \frac{1}{n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, ale přitom se jejich limity rovnají!

Věta 3.43. *Nechť posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má kladnou limitu* $L \in \mathbb{R}^*$. *Pak platí*

$$a_n > 0 \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Je-li navíc limita vlastní, pak

$$a_n > \frac{L}{2} \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne například z Věty 3.41(b), kde položíme

$$b_n = 0, \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Je-li $L \in \mathbb{R}$, pak položíme

$$b_n = \frac{L}{2}, \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

□

Následující věty se hodí v situacích, kdy potřebujeme zjistit existenci či dokonce hodnotu limity a známe jinou posloupnost, která tu první omezuje shora či zdola a známe její limitu. Začněme nejprve větou o nevlastních limitách.

Věta 3.44 (o dvou limitách)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti reálných čísel, pro něž platí*

$$a_n \leq b_n \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí implikace

(a) je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$,

(b) je-li $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Důkaz. Dokažme pouze první implikaci. Druhá se dokáže podobně. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Podle předpokladu existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \ :\ a_n \leq b_n.$$

Dokažme $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Pak podle předpokladu existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \ :\ a_n > K.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$b_n \geq a_n > K.$$

□

V tvrzení Věty 3.44 jsme viděli, že pokud jedna z posloupností měla nevlastní limitu ∞ a omezovala zdola jinou posloupnost, pak ji vlastně také „tlačila do nekonečna“.

Příklad 3.45 Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} = \infty.$$

Řešení. Zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n^2 + 1 > n^2$. Odmocněním dostaneme $\sqrt{n^2+1} > n$. Z Příkladu 3.34 víme, že $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Z Věty 3.44(a) dostáváme žádaný výsledek. ○

Příklad 3.46 Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n! = \infty.$$

Řešení. Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n! \geq n$ a také, že $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Z Věty 3.44(a) dostáváme žádaný výsledek. ○

K tomu, aby jistá posloupnost měla nevlastní limitu ∞ stačí, abychom znali jinou posloupnost, která diverguje k ∞ a omezuje tu první zdola. Je snad jasné, že pokud chceme aby měla daná posloupnost limitu vlastní, nebude stačit znát jinou posloupnost, ohraničující ji jen z jedné strany. V následující větě se dozvíme, že máme-li dvě posloupnosti mající stejnou limitu a třetí posloupnost, která je „vmáčknutá“ mezi ně, pak tato třetí posloupnost má také limitu – dokonce stejnou jako ty dvě. V anglické literatuře se této větě výstižně říká „squeeze theorem“, tzn. volně přeloženo „věta o zmáčknutí“, nebo také „sandwich theorem“. Česká verze zní „věta o dvou policajtech (a jednom opilci)“ či jen „o třech limitách“ nebo „o třech posloupnostech“.

Věta 3.47 (o třech limitách)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti reálných čísel takové, že*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Jestliže existují limity posloupností $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ a platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L \in \mathbb{R}$, pak existuje i limita $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a je rovna L.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z rovností $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ plyne existence $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n \geq n_1 : \ |a_n - L| < \varepsilon, \quad \text{tzn. } L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

a existence $n_2 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n \geq n_2 : \ |c_n - L| < \varepsilon, \quad \text{tzn. } L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Podle předpokladu ještě existuje $n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_3 : \ a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Označme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon,$$

tedy pro $n \geq n_0$ platí

$$|b_n - L| < \varepsilon.$$

□

Příklad 3.48 Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Řešení. Protože
$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n}$$
pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, pak podle Věty 3.47 také
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.$$
○

Příklad 3.49 Vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Řešení. Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$-\frac{1}{n} \le (-1)^n \frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$$
a $\lim\limits_{n\to\infty} -1/n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n$, dostáváme použitím Věty 3.47, že
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$
○

Cvičení 3.50 Dokažte: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, $L = \sup M$ nebo $L = \inf M$. Pak existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $a_n \in M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$
[Návod: Vyjděte z definice suprema/infima a využijte větu o dvou nebo třech limitách.]

Cvičení 3.51 Dokažte: Nechť $L \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost splňující
$$\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \in \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(L).$$
Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

3.5 Metody výpočtu limity

Naše definice limity má velkou nevýhodu v tom, že podle ní nezjistíme, čemu by se měla limita posloupnosti rovnat. Je pouze ve formě testu, který ověří, zda dané číslo je limitou dané posloupnosti – podle toho, zda jistý výrok je či není pravdivý. Jak ale určit tyto hodnoty? U těch jednodušších hodnotu limity nejprve tipneme a poté dokážeme, že náš tip je správný – viz Příklad 3.34. Limity složitějších posloupností pak počítáme s využitím znalosti hodnot limit jednodušších posloupností a s pomocí vět uvedených v této sekci, popř. sekci o vybraných posloupnostech.

Definice 3.52 Mějme dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak jejich součtem, rozdílem, součinem a podílem rozumíme postupně následující posloupnosti:
$$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad \{a_n / b_n\}_{n=1}^{\infty},$$
přitom podíl posloupností je definován v případě, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$. Absolutní hodnotou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme posloupnost
$$\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}.$$

Uvažujme nyní limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Z Příkladu 3.34 víme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$. Jakou má ale limitu posloupnost, která vznikne jako *součet* těchto dvou posloupností? Nebo podobně, uvažujme posloupnost

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n},$$

což je součin konstantní posloupnosti $\{3\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ jejichž limitami jsou po řadě 3 a 0. Na tyto otázky a také na otázky týkající se rozdílu a podílu odpoví následující věta. Přitom mluví pouze o *konvergentních* posloupnostech.

Věta 3.53 (o aritmetice limit konvergentních posloupností)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti, mající limity L_1 a L_2. Pak platí*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|L_1|$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=L_1+L_2$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=L_1-L_2$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=L_1L_2$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{L_1}{L_2}$,

přičemž poslední rovnost platí za dodatečného předpokladu, že $L_2\neq 0$.

Důkaz. ad (a): Nechť $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ je libovolné. Podle předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ pak existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, platí nerovnost $|a_n-L_1|<\varepsilon$. Podle nerovnosti (i) ze Cvičení 2.44 pak máme pro všechna $n\geq n_0$

$$\big||a_n|-|L_1|\big|\leq|a_n-L_1|<\varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že pro jakékoliv $\varepsilon>0$ platí nerovnost $\big||a_n|-|L_1|\big|<\varepsilon$ pro s.v. $n\in\mathbb{N}$, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|L_1|$.
ad (b): Zvolme $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ libovolně. Pak z předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L_1$ plyne existence $n_1\in\mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_1\ :\ |a_n-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Z předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L_2$ plyne existence $n_2\in\mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_2\ :\ |b_n-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Označíme $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Pro taková n pak ovšem platí

$$|a_n-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{a}\quad|b_n-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy pro každé $n\geq n_0$ platí

$$|(a_n+b_n)-(L_1+L_2)|=|a_n-L_1+b_n-L_2|\leq|a_n-L_1|+|b_n-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Shrňme si, co jsme právě dokázali: Zvolili jsme si libovolné $\varepsilon > 0$. K němu jsme našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$. To znamená

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2.$$

ad (c): Důkaz je téměř identický důkazu případu (b). Popř. plyne z (b) a (d), všimneme-li si, že lze psát $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$.
ad (d): Z předpokladu konvergence posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a Věty 3.36 plyne, že tato posloupnost je ohraničená, tzn. existuje $K > 0$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; |a_n| \leq K.$$

Zdůrazněme, že K nezávisí na volbě n. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně a dokažme, že

$$|a_n b_n - L_1 L_2| < \varepsilon \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Z předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ plyne existence $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_1 \; : \; |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)}.$$

Z předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ plyne existence $n_2 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_2 \; : \; |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Smysl volby konstant na pravých stranách nerovností bude vyjasněn na konci důkazu. Pro nás je nyní důležité, že zmíněné výroky platí, protože $\varepsilon/(2K)$ a $\varepsilon/(2(1 + |L_2|))$ jsou kladná čísla. Označíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, pak pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)} \quad \text{a} \quad |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Tedy pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned} |a_n b_n - L_1 L_2| &= |a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2| = |a_n(b_n - L_2) + (a_n - L_1)L_2| \\ &\leq |a_n||b_n - L_2| + |a_n - L_1||L_2| < K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)}|L_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední nerovnosti využili faktu, že $|L_2|/(1 + |L_2|) < 1$ (proč tato nerovnost platí?).
ad (e): Podaří-li se nám dokázat, že pro každou posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejíž limita $L \in \mathbb{R}$ je nenulová a posloupnost $\{1/c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \frac{1}{L}, \tag{3.3}$$

pak z (d) okamžitě plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} \overset{(d)}{=} L_1 \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

a tím je dokázáno (e). Dokažme platnost (3.3). Z (a) pak plyne $\lim_{n\to\infty} |c_n| = |L|$. Z kladnosti limity $|L|$ pak vzhledem k Větě 3.43 plyne existence $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n \geq n_1 \ : \ |c_n| > \frac{|L|}{2}.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Z předpokladu $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ plyne existence $n_2 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\forall n \geq n_2 \ : \ |c_n - L| < \frac{|L|^2\varepsilon}{2}.$$

Označíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, pak pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{1}{c_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - c_n|}{|c_n||L|} < \frac{\frac{|L|^2\varepsilon}{2}}{\frac{|L|}{2}|L|} = \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali (3.3) a tedy i (e). □

Cvičení 3.54 Dokažte, že platí ekvivalence

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Cvičení 3.55 Dokažte matematickou indukcí: Nechť $\{a_n^1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$, …, $\{a_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti, mající vlastní limity L_1, L_2, …, L_m, kde $m \in \mathbb{N}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^1 + a_n^2 + \ldots + a_n^m\right) = L_1 + L_2 + \ldots + L_m,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^1 \cdot a_n^2 \cdot \ldots \cdot a_n^m\right) = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_m.$$

Příklad 3.56 Vypočtěte následující limity posloupností:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}$.

Řešení. Podívejme se tedy na posloupnosti, kterými jsme uvedli větu o aritmetice limit konvergentních posloupností, tzn. Větu 3.53.
ad (a): Podle Příkladu 3.34 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Z Věty 3.53(b) tedy plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0.$$

ad (b): Podle Příkladu 3.34 platí

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Z Věty 3.53(d) tedy plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0.$$ ○

Příklad 3.57 Vypočtěte hodnotu limity

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^n),$$

kde $q \in (-1,1)$.

Řešení. Tento příklad je často studenty nepochopen. Než tedy začneme hledat limitu této posloupnosti, rozmysleme si, jak vypadají její členy – označme je jako a_n. Platí

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,\\ a_2 &= 1+q,\\ a_3 &= 1+q+q^2,\\ a_4 &= 1+q+q^2+q^3,\\ &\ldots \end{aligned}$$

Uvědomme si tedy, že n-tý člen této posloupnosti je součtem o n sčítancích – tzn. počet sčítanců roste s rostoucím indexem. Hodnotu této limity nejde spočítat přímou aplikací Věty 3.53, resp. použitím tvrzení z Cvičení 3.55! To je totiž možné použít pouze na posloupnosti vzniklé sečtením *pevně daného počtu* posloupností. K výpočtu použijeme následující trik. Využijeme středoškolský vzoreček ze Cvičení 1.69 pro $a = 1$ a $b = q$ (a budeme ho často používat i dál, tak si jej zapamatujme). Platí pak

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^n) &= \lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^n)\frac{1-q}{1-q}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}, \end{aligned}$$

kde jsme ještě využili Větu 3.53 a Příklad 3.34. ○

Ve Větě 3.53 jsme odpověděli na otázky týkající se limit posloupností vzniklých pomocí arimetických operací z jiných *konvergentních* posloupností. Co když ale některá z posloupností má nevlastní limitu? Je potřeba vyšetřit celou řadu případů.

Lemma 3.58. *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *pak* $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$.

Důkaz. Máme dokázat, že

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ :\ a_n + b_n > K.$$

Zvolme tedy $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Pak podle $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ platí, že

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \ :\ a_n > K$$

a podle $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ platí, že

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \ :\ b_n > 0.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$a_n + b_n > K + 0 = K.$$

□

Poznámka 3.59 Tvrzení Lemmatu 3.58 lze schematicky zapsat jako

$$\infty + \infty = \infty,$$

což chápeme ve smyslu právě tohoto lemmatu: součet posloupností majících limitu ∞ je posloupnost mající limitu rovněž ∞. Ne náhodou je hodnota výrazu $\infty + \infty$ definována v $\mathbb{R}^*$ – viz Poznámku 2.60(a). V této poznámce se vyskytuje spousta dalších definovaných výrazů – je možné dokázat všechna odpovídající tvrzení. To lze přenechat na čtenáři jako užitečné cvičení. Pokud se nám podaří vše dokázat, můžeme vyslovit všezahrnující Větu 3.60.

Věta 3.60 (o aritmetice limit posloupností)**.** *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$*, kde* $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*$*. Pak platí*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L_1|$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L_1 - L_2$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = L_1 L_2$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$,

jsou-li na pravých stranách výrazy definované v $\mathbb{R}^*$*, viz Poznámku 2.60(a).*

Poznámka 3.61 A proč jsou vlastně některé výrazy „neurčité“? Proč nelze stanovit jejich výsledek? Podívejme se třeba na neurčitý výraz

$$\infty - \infty.$$

Někoho by napadlo, že bychom mohli zadefinovat $\infty - \infty = 0$. To by ale znamenalo, že rozdíl každých dvou posloupností majících limitu ∞ je konvergentní a jeho limita je rovna 0. Není to ovšem pravda. Snadno ověříme, že platí

$$\lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

a přitom

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) - n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

To naši hypotézu vyvrátilo a mohlo podpořit vznik nové hypotézy:

$$\infty - \infty = 1.$$

Ale ani to není pravda. Stačí si uvědomit, že

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

a přitom

$$\lim_{n\to\infty} (n - n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Našli jsme tedy dvě dvojice posloupností mající limity ∞, ale přitom limita jejich rozdílu byla pokaždé jiná. Nelze tedy výrazu $\infty - \infty$ přiřadit jednu konkrétní hodnotu z $\mathbb{R}^*$. Dokonce lze najít dvojici posloupností divergujících k ∞, jejichž rozdíl může mít jakoukoliv limitu nebo vůbec limitu nemá, např.

$$\lim_{n\to\infty} n + (-1)^n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

ale jejich rozdíl nemá limitu (viz dále Příklad 3.82).

Cvičení 3.62 Najděte protipříklady dokazující neurčitost zbývajících výrazů z Poznámky 2.60(c).

Příklad 3.63 Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n\right).$$

Řešení. K výpočtu použijeme výsledků z Příkladu 3.34. Podle něj platí

$$\lim_{n\to\infty} n^2=\infty,\quad \lim_{n\to\infty} n=\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} 2=2.$$

Podle Věty 3.60 pak

$$\lim_{n\to\infty} 2n=\lim_{n\to\infty} 2\cdot\lim_{n\to\infty} n=2\cdot\infty=\infty.$$

Konkrétně jsme teď použili rovnosti

$$a\cdot\infty=\infty \quad (\text{kde } a\in\mathbb{R},\ a>0).$$

Co tedy platí pro limitu posloupnosti $\left\{n^2-2n\right\}_{n=1}^{\infty}$? Nabízí se nám použití Věty 3.60, podle které by mohla platit rovnost

$$\lim_{n\to\infty} n^2-2n=\lim_{n\infty} n^2-\lim_{n\to\infty} 2n.$$

Ta ale platí *pouze* za předpokladu, že výraz na pravé straně *není* neurčitý. Z předchozích výpočtů vidíme, že platí

$$\lim_{n\infty} n^2-\lim_{n\to\infty} 2n=\infty-\infty,$$

což *je* neurčitý výraz. Musíme si pomoct jinak. U počítání limit polynomů platí jedno obecné pravidlo: *vytkneme člen s nejvyšší mocninnou.* V našem případě platí

$$\lim_{n\to\infty} n^2-2n=\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{2}{n}\right).$$

Opět je potřeba prozkoumat limity všech posloupností. Již víme, že $\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$. Dále $\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2=2$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n=0$ (podle Příkladu 3.34), $\lim\limits_{n\to\infty} 2/n=2\cdot 0=0$ (toto podle Věty 3.53) a nakonec

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=1-0=1$$

(opět použití Věty 3.53). Celkově dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=\infty\cdot 1=\infty,$$

kde jsme využili opět Větu 3.60. ○

Příklad 3.64 Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}-n^2-3\right).$$

Řešení. Z Příkladu 3.34 vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3}=\infty,\quad \lim_{n\to\infty} n^2=\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} 3=3.$$

Jde tedy o neurčitý výraz $\infty - \infty$. V tomto případě sice nejde o polynom, ale můžeme postupovat stejně jako v Příkladu 3.63, tzn. vytkneme člen s nejvyšší mocninnou. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}-n^2-3\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1-\frac{3}{n^2}\right).$$

Postupujeme podobně jako v Příkladu 3.64. Podle Příkladu 3.34 platí

$$\lim_{n\to\infty} n^2=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}-1=-1,\quad \lim_{n\to\infty}3=3,$$

z čehož podle Věty 3.53 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1-3\frac{1}{n^2}\right)=0-1-3\cdot 0=-1.$$

Protože $\infty\cdot(-1)$ již není neurčitý výraz, platí podle Věty 3.60

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}+n^2-3\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1-\frac{3}{n^2}\right)=\infty\cdot(-1)=-\infty.$$ ○

Nyní se podívejme na to, jak počítat limity posloupnosti ve tvaru podílu dvou polynomů.

Příklad 3.65 Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-3n^3+1}{n^3+3n^2-n+1}.$$

Řešení. Všimněme si, že tato posloupnost je ve tvaru „polynom lomeno polynomem“. Přirozeně nás může napadnout použití Věty 3.60. To samozřejmě lze, pokud nedojdeme k neurčitému výrazu. Bohužel v tomto případě jde vždy o neurčitý výraz $\pm\infty/\infty$ (sami ověřte). Musíme opět použít nějaký jiný způsob. Bezpečný způsob výpočtu této limity je opět velmi jednoduchý: *Vytkneme z čitatele i jmenovatele člen s nejvyšší mocninou a pokrátíme co půjde.* V tomto případě vytkneme v čitateli výraz n^5 a ve jmenovateli výraz n^3. Dostáváme tak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-3n^3+1}{n^3+3n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5(1-3\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5})}{n^3(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}.$$

Po zkrácení vytknutých členů již můžeme vypočítat hodnotu limity s použitím Věty 3.60. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5(1-3\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5})}{n^3(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-3\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5})}{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{\infty\cdot(1-3\cdot 0+0)}{1+3\cdot 0-0+0}=\infty.$$ ○

Kromě algebraických výrazů s nevlastními čísly ve tvaru uvedenými v Poznámce 2.60(a), je možné se setkat ještě s výrazem $1/0$, který je sám o sobě neurčitý. Lze ale dokázat následující větu.

Věta 3.66. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Pokud navíc*

(a) $a_n > 0$ *pro s.v.* $n \in \mathbb{N}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$,

(b) $a_n < 0$ *pro s.v.* $n \in \mathbb{N}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$,

(c) $a_n \neq 0$ *pro s.v.* $n \in \mathbb{N}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.

Důkaz. Dokažme případ (a), ostatní lze nechat čtenáři jako cvičení. Máme dokázat, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \ :\ \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zvolme tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle předpokladu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pak

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \ :\ |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Dále z předpokladu kladnosti a_n plyne

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \ :\ a_n > 0.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

□

Poznámka 3.67 Tvrzení Věty 3.66 se často výstižně schematicky zapisuje takto

$$\frac{1}{0+} = \infty, \quad \frac{1}{0-} = -\infty, \quad \frac{1}{|0|} = \infty.$$

Může se také hodit následující věta, ve které dokonce u jedné z posloupností vůbec nevyžadujeme existenci limity.

Věta 3.68. *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad a \quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená.}$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| < K$. Z předpokladu nulovosti limity posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

□

Příklad 3.69 Vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sin n.$$

Řešení. Protože e > 1 (e je Eulerova konstanta), tzn. $\mathrm{e}^{-1} \in (0,1)$, pak podle Příkladu 3.34 platí
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = 0.$$

Na druhou stranu o $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ nevíme nic (i když se dá dokázat, že tato limita neexistuje). Co s tím? Víme ale, že $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, protože $|\sin x| \le 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Lze tedy použít Větu 3.68, podle které pak
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sin n = 0.$$

To si lze pamatovat jako heslo: „posloupnost mající nulovou limitu × ohraničená posloupnost = posloupnost mající nulovou limitu“.

Tento příklad by šel vyřešit i s pomocí Věty 3.47. Z kladnosti čísel e^{-n} a nerovností $-1 \le \sin n \le 1$ lze získat platnost nerovností
$$-\mathrm{e}^{-n} \le \mathrm{e}^{-n} \sin n \le \mathrm{e}^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} -\mathrm{e}^{-n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n}$, pak podle Věty 3.47 dostáváme, že vyšetřovaná limita existuje a je opět rovna nule. ◯

Příklad 3.70 Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n!}{n}.$$

Řešení. Položíme $a_n = 1/n$, $b_n = \sin n!$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{a} \quad |b_n| = |\sin n!| \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podle Věty 3.68 platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n!}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n! = 0.$$ ◯

3.6 Vybrané posloupnosti

Definice 3.71 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost
$$a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots, a_{k_n}, \dots$$
nazýváme *vybranou posloupností z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (neboli *podposloupností* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), značíme ji $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 3.72 Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Uvažujme následující tři posloupnosti

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots,$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Která z nich je podposloupností posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$? Vidíme, že ve všech případech obsahují posloupnosti členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V prvním případě by ale příslušná posloupnost indexů $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ musela vypadat takto

$$1, 2, 2, 3, \ldots$$

což není rostoucí posloupnost. Tedy první posloupnost není vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. U druhé přímo vidíme, že platí $k_n = 2n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a snadno ověříme, že jde o rostoucí posloupnost. Podobně u třetí posloupnosti vidíme, že $k_n = n + 1$ pro $n \in \mathbb{N}$, tedy jde rovněž o podposloupnost.

Lemma 3.73. *Nechť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak*

$$k_n \geq n \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N},$$

tedy $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$.

Důkaz. Provedeme matematickou indukcí. Protože $k_1 \in \mathbb{N}$, musí platit $k_1 \geq 1$. Přejděme k indukčnímu kroku. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné a platí $k_n \geq n$. Protože $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, platí $k_{n+1} > k_n \geq n$. Protože k_{n+1} a k_n jsou přirozená čísla, existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$k_{n+1} = k_n + m \geq n + m \geq n + 1.$$

Tvrzení o limitě posloupnosti pak plyne okamžitě z Věty 3.44. □

Věta 3.74. *Má-li posloupnost limitu, pak každá její podposloupnost má také limitu a jsou si rovny.*

Důkaz. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Uvažujme podposloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Dokažme, že také $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = L$. Zvolme libovolně $\mathcal{U}(L)$. Podle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \in \mathcal{U}(L)$. Z Lemmatu 3.73 pak pro každé $n \geq n_0$ platí také $k_n \geq n \geq n_0$ a tedy $a_{k_n} \in \mathcal{U}(L)$. □

Větu 3.74 lze používat k vypočítání limity posloupnosti, u které selžou předchozí postupy.

Příklad 3.75 Vypočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}.$$

Řešení. Pro jednoduchost zápisu označme $a_n = \sqrt[n]{2}$. Nejprve je zapotřebí ověřit, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Lze dokázat, že je nerostoucí a ohraničená zdola (číslem 1) – proveďte. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Nyní určíme hodnotu α. Uvažujme podposloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 3.74 platí
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha.$$
Navíc platí rovnosti
$$a_{2n} = \sqrt[2n]{2} = \sqrt{\sqrt[n]{2}} = \sqrt{a_n},$$
tedy
$$a_{2n}^2 = a_n$$
pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud podle Věty 3.60 platí
$$\alpha^2 = \alpha, \quad \text{tzn.} \quad \alpha(\alpha - 1) = 0.$$
Tedy limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je buď 0 nebo 1. Protože všechny členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou větší nebo rovny číslu 1, platí (podle Věty 3.41(a)) že
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$
○

Cvičení 3.76 Dokažte, že pro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$
[Návod: Postupujte stejně jako ve speciálním případě (Příklad 3.75) a vyšetřete zvlášť pro $a > 1$, $a = 1$ a $a \in (0, 1)$.]

Příklad 3.77 Vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 3.34 víme, že
$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty,$$
tzn. jde o neurčitý výraz a Větu 3.60 tedy použít nelze. Nejprve dokažme, že posloupnost má limitu. Podle Věty 3.38 stačí dokázat, že posloupnost je nerostoucí. Navíc víme, že jde o posloupnost kladných čísel, tedy je i ohraničená zdola - a to číslem 0. Odtud a podle Věty 3.38 dostáváme, že vyšetřovaná posloupnost má *vlastní* limitu a podle Věty 3.41(a) je tato limita větší nebo rovna 0. Označme
$$a_n = \frac{n}{2^n}, \ n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$
Uvažujme posloupnost $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, což je posloupnost vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (viz Definici 3.71 pro $k_n = n+1$). Podle Věty 3.74 má tato posloupnost stejnou limitu. Pro tuto limitu platí
$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\alpha + 0,$$

kde jsme postupně využili Větu 3.60 a Příklad 3.34. Dostali jsme rovnost

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha.$$

Odečteme-li od obou stran číslo $\alpha/2$ a vynásobíme dvěma, dostáváme

$$\alpha = 0.$$

Limita vyšetřované posloupnosti je tedy nulová.

Ještě je potřeba dodat, že rovnice $\alpha = \alpha/2$ má v množině $\mathbb{R}^\star$ dokonce *tři* řešení, a to $-\infty$, 0 a ∞ (ověřte dosazením). Protože jsme ale dopředu věděli, že $\alpha \in \mathbb{R}$, mohli jsme od obou stran rovnosti $\alpha = \alpha/2$ odečíst výraz $\alpha/2$. ◯

Podobným způsobem lze dojít k hodnotám limit dalších důležitých posloupností.

Cvičení 3.78 Dokažte, že platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\log_c n}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha, c \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ c \in (0,1) \cup (1,\infty),\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \text{kde } \alpha, a \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0,\ |a| > 1,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R},\ |a| > 1,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.
\end{aligned}$$

Dodejme, že posloupnosti ze Cvičení 3.78 nemusejí být monotónní, např. posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, kde $a_n = 3^n/n!$ není nerostoucí, tzn. neplatí nerovnosti $a_{n+1} \leq a_n$ pro *každé* $n \in \mathbb{N}$, ale pouze existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, tak, že tato nerovnost platí pro $n \geq n_0$. I tak ale tato posloupnost limitu má – viz Poznámku 3.40.

Poznámka 3.79 Limity ze Cvičení 3.78 vyjadřují, jak rychle roste jedna posloupnost vzhledem k jiné. Uvažujme dvě posloupnosti, např. $\{n\}_{n=1}^\infty$ a $\{2^n\}_{n=1}^\infty$, jejichž členy jsou

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

a

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

Vidíme, že členy druhé posloupnosti rostou daleko rychleji než členy první. Podělíme-li n-tý člen první posloupnosti n-tým členem druhé posloupnosti, dostáváme výraz

$$\frac{n}{2^n}.$$

Tento podíl nám vystihuje vztah velikostí členů těchto dvou posloupností. V Příkladu 3.77 jsme vypočítali, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0,$$

tzn. „pro velká n je podíl $n/2^n$ téměř nulový“, neboli „pro velká n je číslo n vzhledem k číslu 2^n nicotné“. Říkáme pak, že „posloupnost $\{2^n\}_{n=1}^\infty$ roste rychleji než posloupnost $\{n\}_{n=1}^\infty$“.

Příklad 3.80 Vypočtěte hodnotu limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^{10} - 1}{n^2 - 3^n + 1}.$$

Řešení. Při počítání limity této posloupnosti se můžeme inspirovat heslem při řešení Příkladu 3.65. Toto pravidlo si zobecníme: *Vytkneme z čitatele i jmenovatele nejrychleji rostoucí členy a tyto pak srovnáme.* Podívejme se na výrazy z čitatele: Jde o posloupnosti $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{n^{10}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{1\}_{n=1}^{\infty}$. Nejrychleji roste $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$. Ve jmenovateli zase nejrychleji roste $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$. Upravíme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^{10} - 1}{n^2 - 3^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(1 + \frac{n^{10}}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)}{3^n\left(\frac{n^2}{3^n} - 1 + \frac{1}{3^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1 + \frac{n^{10}}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{\frac{n^2}{3^n} - 1 + \frac{1}{3^n}}$$
$$= 0 \cdot \frac{1 + 0 - 0}{0 - 1 + 0} = 0.$$

○

Z Věty 3.74 okamžitě plyne tvrzení o *neexistenci* limity.

Důsledek 3.81. *Jestliže má posloupnost dvě podposloupnosti s různými limitami, pak tato posloupnost limitu nemá.*

Ilustrujme použití tohoto důsledku na příkladu.

Příklad 3.82 Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} q^n$$

pro $q \in \mathbb{R}$, $q \leq -1$ neexistuje.

Řešení. V Příkladu 3.34(c) jsme mluvili o limitě geometrické posloupnosti, ale zamlčeli jsme případ $q \leq -1$. Nyní to napravíme. Vyšetřeme nejprve případ $q = -1$, tzn. posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ mající členy

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

(nakreslete si sami její graf). Vidíme, že členy s lichým indexem jsou rovny -1 a členy se sudým indexem jsou rovny 1. Uvažujme tedy dvě podposloupnosti: $\left\{(-1)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{(-1)^{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Důsledek 3.81 dává, že $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

Nyní se podívejme na případ $q < -1$ (nakreslete si graf této posloupnosti např. pro $q = -2$). Opět uvažujme podposloupnosti $\left\{q^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{q^{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Protože $q^2 > 1$, pak

$$\lim_{n\to\infty} q^{2n} = \lim_{n\to\infty} (q^2)^n = \infty,$$

a

$$\lim_{n\to\infty} q^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (q^2)^n q = \infty \cdot q = -\infty,$$

kde jsme využili opět Příkladu 3.34. Opět z Důsledku 3.81 plyne, že posloupnost nemá limitu.

○

Věta 3.74 byla ve formě implikace – existuje-li limita posloupnosti, pak limita každé její podposloupnosti existuje. Na tvrzení v opačném směru si počkáme – viz Větu 3.93. Prozatím uveďme podobnou větu ve tvaru ekvivalence, a to pro jistý speciální typ podposloupnosti.

Věta 3.83. *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel a* $m \in \mathbb{N}$. *Pak existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *právě tehdy, když existuje limita* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+m}$. *Pokud limity existují, rovnají se.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Vyplývá přímo z Věty 3.74.
($\Leftarrow$): Nechť $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+m}$. Zvolme $\mathcal{U}(L)$ libovolně. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \ :\ a_{n+m} \in \mathcal{U}(L).$$

Položme $n_0 = n_1 + m$. Je-li totiž $n \geq n_0 = n_1 + m$, pak $n + m \geq n_1$. Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ :\ a_n \in \mathcal{U}(L).$$

Tím je dokázáno, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = L$. □

Poznámka 3.84 Protože vybraná posloupnost je zase posloupnost, můžeme i z ní vybrat posloupnost. Platí, že *je-li* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vybraná z* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je vybraná z* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, *pak* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je vybraná z* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Znamená to tedy, že vybereme-li z podposloupnosti $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, jde zase o podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy můžeme ji značit třeba jako $\{a_{\ell_n}\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

3.7 Hromadné body posloupnosti

Pomocí vybraných posloupností lze definovat pojem *hromadného bodu posloupnosti*. Půjde o podobný pojem jako je limita posloupnosti – budeme věnovat pozornost zejména tomu, kolik hromadných bodů posloupnost má a jaký vztah má k limitě posloupnosti.

Definice 3.85 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $a \in \mathbb{R}^*$ je *hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$$

Množinu všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme $\mathfrak{H}(a_n)$.

Poznámka 3.86 Okamžitě z definice hromadného bodu a již známých informací můžeme vyvodit následující:

(a) Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu L, pak podle Věty 3.74, každá z ní vybraná posloupnost má také limitu L. Tedy posloupnost pak má jediný hromadný bod L.

(b) Z Poznámky 3.84 plyne, že je-li $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak $\mathfrak{H}(a_{k_n}) \subset \mathfrak{H}(a_n)$.

Příklad 3.87 Vyšetřete hromadné body posloupností

(a) $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, (b) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, (c) $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. ad (a): Protože posloupnost má limitu rovnu ∞, podle Poznámky 3.86 platí

$$\mathfrak{H}(n^2) = \{\infty\}.$$

ad (b): Jak už víme z Příkladu 3.82, posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu nemá. Vybereme-li si dvě podposloupnosti

$$\left\{(-1)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad \left\{(-1)^{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

dostáme dva hromadné body 1 a -1. Protože posloupnosti indexů $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$ zcela pokrývají množinu přirozených čísel, pak jakákoliv další podposloupnost posloupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ by musela obsahovat pouze členy z dvou předešlých podposloupností, další hromadné body již posloupnost nemá.
ad (c): Podobně zjišťujeme, že

$$\mathfrak{H}((-1)^n n) = \{\infty, -\infty\}.$$

○

Lemma 3.88. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.*

(a) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená shora, pak označíme-li

$$b_n = \sup\{a_k \;;\; k \geq n\}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, platí:

(i) posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dobře definovaná a nerostoucí,

(ii) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$,

(iii) existuje limita posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \;;\; k \geq n\} < \infty,$$

(iv) číslo b je největším hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená shora, pak ∞ je její hromadný bod.

Důkaz. ad (a): Fakt, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dobře definovaná, je zajištěna předpokladem ohraničenosti této posloupnosti shora, protože díky tomu $b_n \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z inkluze

$$\{a_k \;;\; k \geq n+1\} \subset \{a_k \;;\; k \geq n\}$$

a Cvičení 2.65 plyne, že $b_{n+1} \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, tzn. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. Z Věty 3.38 plyne, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a je rovna $\inf b_n$ – označme ji b. Zřejmě $b < \infty$.

Přímo z definice b_n a z Věty 2.24(a)(i) plyne

$$b_n \geq a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Odtud a z Vět 3.41 a 3.74 plyne také

$$\forall a \in \mathfrak{H}(a_n) \;:\; a \leq b,$$

tzn. b je horní závora množiny hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokažme nyní, že $b \in \mathfrak{H}(a_n)$. Tím dokážeme, že b je největším hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rozlišíme dva případy: Platí buď $b = -\infty$ nebo $b \in \mathbb{R}$.
Nechť $b = -\infty$. Pak z nerovnosti (3.4) platící pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a z Věty 3.44 vyplývá, že $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty = b$. Dokonce tedy platí $\mathfrak{H}(a_n) = \{b\} = \{-\infty\}$.
Nechť $b \in \mathbb{R}$. Z definice b_n a Věty 2.24(a)(ii') dále plyne, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists k_n \geq n\ :\ a_{k_n} > b_n - \varepsilon. \tag{3.5}$$

Pak podle (3.5) pro $n = 1$ a $\varepsilon = 1$ existuje $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$a_{k_1} > b_1 - 1.$$

Znovu, podle (3.5) pro $n = k_1 + 1$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existuje $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ tak, že

$$a_{k_2} > b_2 - \frac{1}{2}.$$

Pokračujeme dále a dostáváme vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_{k_n} \geq a_{k_n} > b_n - \frac{1}{n},$$

kde první nerovnost plyne z (3.4). Z Věty 3.47 dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = b$. Tedy opět $b \in \mathfrak{H}(a_n)$.
ad (b): Předpokládejme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená shora, tzn. platí

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ a_n > K.$$

Položme $K = 1$. Pak existuje $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$a_{k_1} > 1.$$

Položme $K = \max\{2, a_1, \ldots, a_{k_1}\}$. Pak existuje $k_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{k_2} > K$. Zřejmě pak platí

$$k_2 > k_1 \quad \text{a} \quad a_{k_2} > 2.$$

Položme $K = \max\{3, a_1, \ldots, a_{k_2}\}$. Pak existuje $k_3 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{k_3} > K$. Zřejmě pak platí

$$k_3 > k_2 \quad \text{a} \quad a_{k_3} > 3.$$

Takto pokračujeme dále a dostáváme vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_{k_n} > n.$$

Z Věty 3.44 plyne, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$. $\square$

Podobně lze dokázat následující lemma.

Lemma 3.89. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.*

(a) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zdola, pak označíme-li

$$c_n = \inf\{a_k\ ;\ k \geq n\}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, platí:

(i) posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dobře definovaná a neklesající,

(ii) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$,

(iii) existuje limita posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k\ ;\ k \geq n\} > -\infty$$

(iv) číslo c je nejmenším hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zdola, pak $-\infty$ je její hromadný bod.

Konečně můžeme zformulovat větu popisující množinu všech hromadných bodů.

Věta 3.90. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak*

(a) $\mathfrak{H}(a_n) \neq \emptyset$,

(b) $\mathfrak{H}(a_n)$ má největší a nejmenší prvek (v $\mathbb{R}^*$).

Důkaz. ad (a): Tvrzení plyne okamžitě z Lemmatu 3.88 (nebo také z Lemmatu 3.89).
ad (b): Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená shora, pak podle Lemmatu 3.88(a) má $\mathfrak{H}(a_n)$ největší prvek. Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená shora, pak podle Lemmatu 3.88(b) platí $\infty \in \mathfrak{H}(a_n)$. Zřejmě ∞ je její největší prvek (v $\mathbb{R}^*$). K dokázání existence nejmenšího prvku $\mathfrak{H}(a_n)$ použijeme Lemma 3.89. $\square$

Tvrzení Věty 3.90 nás opravňuje k následující definici.

Definice 3.91 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Její největší hromadný bod nazýváme *limes superior posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, značíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$; nejmenší hromadný bod nazýváme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, značíme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Poznámka 3.92 O limes superior a limes inferior posloupnosti lze říct již spoustu informací:

(a) Z Lemmat 3.88 a 3.89 plyne, že

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k\ ;\ k \geq n\} < \infty & \text{pokud } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je shora ohraničená,} \\ \infty & \text{pokud } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je shora neohraničená} \end{cases}$$

a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k\ ;\ k \geq n\} > -\infty & \text{pokud } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je zdola ohraničená,} \\ -\infty & \text{pokud } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je zdola neohraničená.} \end{cases}$$

(b) Přímo z definice plyne nerovnost

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(c) Zdůrazněme, že na rozdíl od limity, každá posloupnost má limes superior i limes inferior.

Věta 3.93. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

(a) existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

(b) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(c) $\mathfrak{H}(a_n)$ je jednoprvková množina.

Navíc, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{a} \quad \mathfrak{H}(a_n) = \{L\}.$$

Důkaz. Ekvivalence mezi (b) a (c) plyne přímo z definice limes superior a limes inferior.
Dokažme implikaci (a) ⇒ (c): Nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Z Věty 3.74 plyne, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má jediný hromadný bod, což je právě L.
Dokažme implikaci (b) ⇒ (a): Označme $L = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Mohou nastat tři případy:
Nechť $L \in \mathbb{R}$. Podle Poznámky 3.92(a) je posloupnost ohraničená a z Lemmat 3.88(a)(i) a 3.89(a)(i) platí

$$c_n \leq a_n \leq b_n.$$

Podle předpokladu, posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu rovnou L, tedy podle Věty 3.47 existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a je rovna L.
Nechť $L = \infty$. Opět z Poznámky 3.92(a) vidíme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená, tedy podle Lemmatu 3.89(a)(i) platí

$$a_n \geq c_n.$$

Protože limita posloupnosti na pravé straně je ∞, pak podle Věty 3.44 platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Případ $L = -\infty$ provedeme podobně. □

Nakonec zmíníme větu, se kterou se budeme v budoucnosti často setkávat.

Věta 3.94 (Bolzanova–Weierstrassova)**.** *Z ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost.*

Důkaz. Podle Věty 3.90 lze z každé posloupnosti vybrat posloupnost, která má limitu. Protože tato posloupnost je ohraničená, z Věty 3.41(a) plyne, že její limita je vlastní. □

3.8 Bolzanova–Cauchyova podmínka

Představme si nutnou a postačující podmínku pro konvergenci posloupnosti (tzn. existenci vlastní limity posloupnosti) – Větu 3.98.

Definice 3.95 Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \ m, n \geq n_0 \ : \ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Poznámka 3.96 Výroku v definici cauchyovské posloupnosti se také říká *Bolzanova–Cauchyova podmínka*. Podmínka je splněna v případě, že jsme k libovolně malému kladnému číslu ε schopni najít takový index n_0, že vzdálenost libovolných dvou prvků posloupnosti, jejichž indexy jsou větší nebo rovny tomuto indexu, je menší než zadané číslo ε.

Věta 3.97. *Každá cauchyovská posloupnost je ohraničená.*

Důkaz. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost. Pak pro $\varepsilon = 1 > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a $m = n_0$ platí

$$|a_{n_0} - a_n| < 1.$$

Pro všechna $n \geq n_0$ tedy platí

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| = |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|.$$

Položme

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}.$$

Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$, tzn. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. □

Věta 3.98. *Posloupnost je cauchyovská právě tehdy, když je konvergentní (tj. má vlastní limitu).*

Důkaz. ($\Leftarrow$): Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pro něž $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, pro něž $m, n \geq n_0$, platí

$$|a_m - a_n| = |a_m - L + L - a_n| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.
($\Rightarrow$): Nyní naopak předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Podle Věty 3.97 existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$. Díky ohraničenosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a vzhledem k Větě 3.94 existuje konvergentní vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme $L \in \mathbb{R}$ její limitu. Dokažme, že dokonce $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ – tím bude věta

dokázána. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = L$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_1$ platí

$$|a_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, pak existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_2$ platí

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí podle Lemmatu 3.73 nerovnosti $k_n \geq n \geq n_0 \geq n_2$ a podobně $k_n \geq n_1$, z čehož plyne, že

$$|a_n - L| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - L| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní. □

Tato věta představuje nutnou a postačující podmínku konvergence. Lze ji využít i na posloupnosti, které nejsou monotónní. Její přednost spočívá v tom, že abychom dokázali konvergenci posloupnosti, nemusíme znát její limitu (ani tip na ni).

Cvičení 3.99 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každou posloupnost racionálních čísel $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$, existuje vlastní

$$\lim_{n\to\infty} a^{q_n},$$

přitom hodnota této limity nezávisí na volbě posloupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dále s využitím výsledků Cvičení 3.50 dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = a^{\alpha}.$$

S využitím těchto faktů dokažte tvrzení uvedená v Poznámce 2.38.

3.9 Eulerovo číslo

V této sekci definujeme jednu z nejdůležitějších konstant matematiky – tzv. Eulerovo číslo. Definovat ho budeme jako limitu jisté posloupnosti. Nejprve je třeba dokázat, že ta posloupnost je vůbec konvergentní. K tomu využijeme tzv. Bernoulliovu nerovnost.

Příklad 3.100 Dokažte Bernoulliovu nerovnost, tzn.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1\ \forall n \in \mathbb{N} :\ (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

přitom platí ostré nerovnosti právě tehdy, když $x \neq 0$ a $n > 1$.

Řešení. Nejprve dokažme matematickou indukcí ostré nerovnosti, tzn. že pro každé $x \geq -1$, $x \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Nechť $n = 2$. Zřejmě platí

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí $(1+x)^n > 1+nx$. Protože podle předpokladu platí $x+1 \geq 0$, dostáváme

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x.$$

Pro $x=0$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí rovnost. Stejně tak pro $x \geq -1$ a $n=1$. ○

Lemma 3.101. *Posloupnost*

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je rostoucí a ohraničená shora. Posloupnost

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je klesající a ohraničená zdola. Obě posloupnosti mají stejnou limitu.

Důkaz. Označme

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro $n \geq 2$ platí

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > \left(1-\frac{n}{n^2}\right)\frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\frac{n}{n-1} = 1.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že jediná zde uvedená nerovnost plyne z Bernouliovy nerovnosti. Tedy pro všechna $n > 1$ platí $a_n > a_{n-1}$ neboli $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} > a_n$, tj. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající. Podobně dokážeme, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $b_{n+1} < b_n$, tj. že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Dále pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n > a_n. \tag{3.6}$$

Dohromady dostáváme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_1 < a_n < b_n < b_1.$$

Tedy obě posloupnosti mají vlastní limitu a z rovnosti v (3.6) plyne, že je stejná. □

Můžeme tedy vyslovit následující definici.

Definice 3.102 Limitu posloupnosti

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

nazýváme Eulerovou konstantou a značíme symbolem e.

Poznámka 3.103

(a) Lemma 3.101 nám také dává jednoduché odhady čísla e. Vzhledem k vlastnostem těchto posloupností plyne, že každý člen první posloupnosti je menší než e a každý člen druhé posloupnosti je větší než e, tzn.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Odtud také plyne, že pro $n > 1$ platí

$$1 + \frac{1}{n+1} < \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

(b) Číslo e je iracionální - viz např. [8].

Kapitola 4

Reálné funkce reálné proměnné

Pojem reálné funkce reálné proměnné byl zaveden pro matematické vyjádření *závislosti* jisté veličiny na jiné veličině.

Uvažujme nejjednodušší příklad pohybu bodu po přímce. Uvažujme hmotný bod, jehož poloha je určená reálným číslem (představme si raketu, která startuje kolmo vzhůru a polohou rozumíme její vzdálenost od povrchu). Přitom chceme zachytit jeho pohyb v závislosti na čase. Jde o to, jak popsat polohu hmotného bodu v každém časovém okamžiku – každému časovému okamžiku (který modelujeme reálným číslem) *přiřadíme* reálné číslo určující polohu bodu. V tomto případě tedy poloha bodu závisí na čase. Kdybychom např. polohu hmotného bodu počítali tak, že poloha v čase od začátku pohybu byla rovna druhé mocnině času od začátku, pak dostáváme vztah

$$t \mapsto x(t) = t^2,$$

kde $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, a kde $t = 0$ reprezentuje „počáteční čas“. Tedy časovému okamžiku t se přiřazuje hodnota polohy x, kterou vypočítáme tak, že umocníme časový okamžik t na druhou. Zde tedy veličina polohy přímo závisí na čase.

Uvažujme úlohu vyrobit jímku ve tvaru válce o objemu $300m^3$. Jaký poloměr r má mít základna této jímky v závislosti na její výšce v? Ze vzorce pro objem válce snadno odvodíme, že jde o

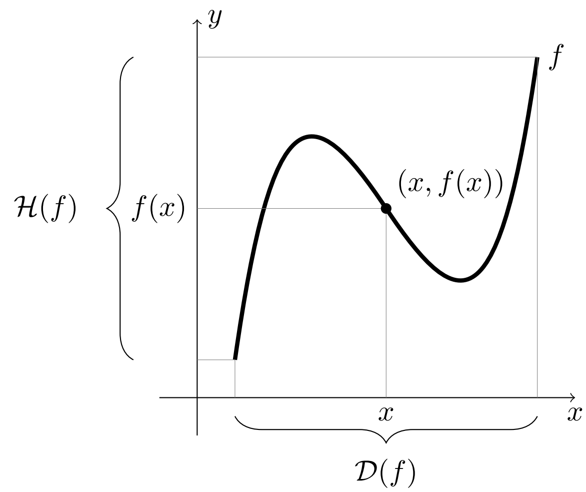
$$v \mapsto r(v) = \sqrt{\frac{300}{\pi v}},$$

kde v je výška jímky v metrech a r je poloměr základny jímky opět v metrech. Zde opět vidíme přímou závislost mezi dvěma veličinami výšky v a poloměru r, přičemž v je nezávisle proměnná a r nabývá hodnot v závislosti na hodnotách proměnné v.

Zde uvedené příklady mají společné to, že abstrahujeme-li od jednotek, dostáváme se k pravidlu, kdy je reálným číslům přiřazeno (obecně jiné) reálné číslo. Tuto abstrakci pak nazýváme reálnou funkcí reálné proměnné – viz Definici 4.1.

4.1 Funkce a její graf

S pojmem funkce jsme se na střední škole setkávali v matematice poměrně často. Jednalo se o jednodušší typy funkcí (např. lineární, kvadratická), ale také o mnoho pokročilejší (jako třeba goniometrické funkce, exponenciální a logaritmické). Z těchto funkcí se vytvářeli další funkce – pomocí aritmetických operací a také pomocí skládání (zde si vše zopakujeme).



Obrázek 4.1: Graf funkce f.

Pojem funkce je ale daleko širší, a zmíněné základní typy funkcí tvoří celkem malou (i když velmi důležitou) část.

Nejprve si řekněme, co vlastně rozumíme pod pojmem funkce.

Definice 4.1 *Reálnou funkcí (jedné) reálné proměnné* rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Poznámka 4.2 Funkce je tedy speciální zobrazení přiřazující reálným číslům reálná čísla. Máme již tak definovánu celou řadu dalších pojmů související s funkcemi – viz Definici 1.48.

Poznámka 4.3 Zdůrazněme, že funkce je jednoznačně daná svým definičním oborem a funkčními hodnotami pro body z definičního oboru. Při definování konkrétní funkce je tedy vždy potřeba tyto dvě informace zadat: Definiční obor je množina a funkční hodnoty jsou většinou dány *předpisem*. Pokud informace o definičním oboru chybí, platí nepsané pravidlo, že definičním oborem je množina všech reálných čísel, pro které má předpis smysl – tomuto definičnímu oboru se pak říká *přirozený definiční obor*.

Poznámka 4.4 Protože funkci jsme definovali jako zobrazení, stejně jako u posloupnosti máme k dispozici pojem grafu – viz Definici 1.51. *Graf funkce* je tedy množina uspořádaných dvojic (relace na $\mathbb{R}$): prvek definičního oboru společně s funkční hodnotou dané funkce v tomto bodě – viz Obrázek 4.1. Mimo jiné, jeho náčrtek dává velmi dobrou představu o povaze dané funkce. Jak uvidíme dále, mnohé vlastnosti funkcí se dají okamžitě vyčíst z grafu funkce – stejně jako z grafu posloupnosti. Vlastně posloupnost reálných čísel není nic jiného než reálná funkce reálné proměnné, jejíž definiční obor je roven množině všech přirozených čísel.

Poznámka 4.5 Jak již bylo řečeno v Poznámce 4.3, funkce je dána svým definičním oborem a funkčními hodnotami funkce. Ty jsou dány často funkčním předpisem, ve kterém figuruje písmeno, tzv. proměnná, za které když dosadíme prvek definičního oboru, vypočítáním vzniklého výrazu získáme funkční hodnotu dané funkce v tomto bodě, např.

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2],$$

či

$$x \mapsto x^2, \quad x \in [0, 2],$$

kde v obou případech jde o funkci přiřazující každému číslu z intervalu $[0, 2]$ jeho druhou mocninu. Někdy funkci nelze zapsat pomocí jediného algebraického výrazu, nebo výrazu, ve kterém se vyskytují názvy jiných již definovaných funkcí. Funkce bývá zadána i „po částech“. Např. uvažujeme-li funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou takto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1], \\ 1 & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

rozumíme tím, že $f(x) = 0$ pro všechny hodnoty x z intervalu $[0, 1]$ $f(x) = 1$ je-li $x < 0$ nebo $x > 0$. Tímto způsobem definujeme např. funkci signum nebo Dirichletovu funkci.

Nejde ale o jediný způsob zadání. Funkce může být dána také parametricky či implicitně. V těchto skriptech takový způsob zadání nebude potřeba.

Často budeme potřebovat v předpokladech uvést, že definiční obor obsahuje nějakou množinu. K tomu se bude hodit následující definice – výrazně nám urychlí vyjadřování.

Definice 4.6 Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že funkce f je definovaná na množině M, jestliže $M \subset \mathcal{D}(f)$.

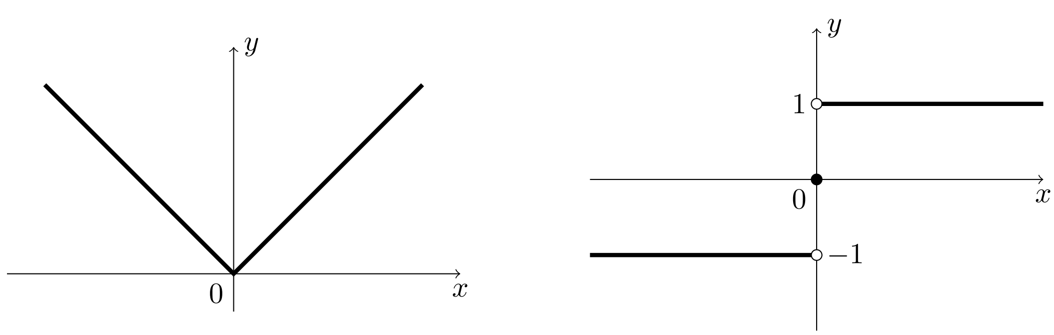
Ukažme si nyní několik příkladů užitečných či zajímavých funkcí.

Příklad 4.7

(a) Definujme funkci *absolutní hodnota* následujícím předpisem:

$$x \mapsto |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

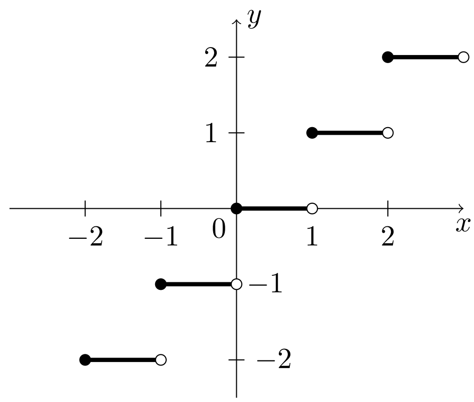
Odtud je vidět, že tato funkce každému nezápornému číslu přiřadí toto číslo a každému zápornému číslu přiřadí číslo k němu opačné. Graf je pak na Obrázku 4.2a. Z něj je zase vidět, že oborem hodnot je interval $[0, \infty)$. Zdůrazněme rozdíl mezi „absolutní hodnotou reálného čísla“ a „funkcí absolutní hodnota“: to první je číslo, a to druhé je funkce, kterou jsme právě definovali.



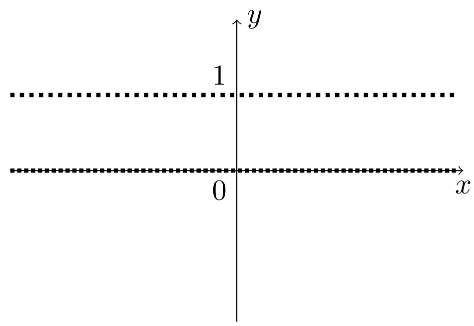
(a) Graf funkce *absolutní hodnota*.

(b) Graf funkce *signum*.

Obrázek 4.2: Grafy funkcí z Příkladu 4.7.



(a) Graf funkce *celá část.*



(b) Graf *Dirichletovy funkce.*

Obrázek 4.3: Grafy funkcí z Příkladu 4.7.

(b) Další používanou jednoduchou funkcí je funkce *signum* (neboli *znaménková funkce*) takto definovaná:

$$x \mapsto \operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Definičním oborem je tedy množina všech reálných čísel a oborem hodnot tříprvková množina $\{-1, 0, 1\}$, viz Obrázek 4.2b.

(c) Dále definujme funkci *celá část*:

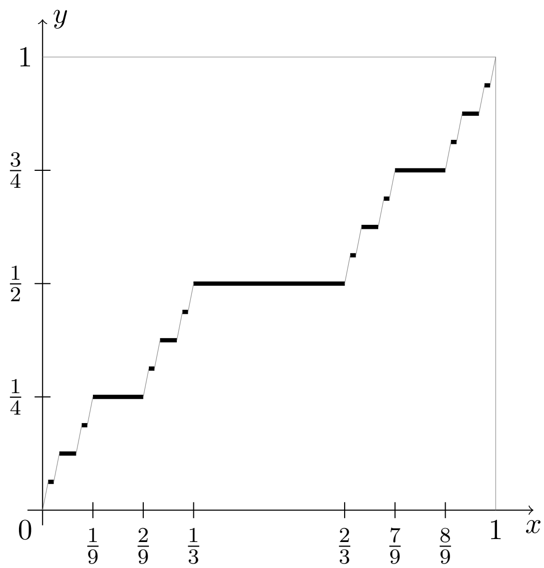
$$x \mapsto \lfloor x \rfloor, \quad x \in \mathbb{R}$$

Zřejmě, definiční obor je množina všech reálných čísel, obor hodnot množina všech celých čísel, graf této funkce je na Obrázku 4.3a.

(d) Nakonec si představme *Dirichletovu funkci* $\chi_{\mathbb{Q}}$, která je definovaná takto:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Graf této funkce nelze dost dobře načrtnout. Chabý výsledek pokusu o graf je na Obrázku 4.3b.



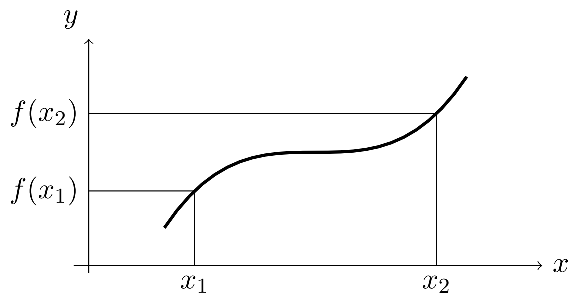
Obrázek 4.4: Graf Cantorovy funkce.

(e) Pro zajímavost si představme také *Cantorovu funkci* (tzv. „ďáblovy schody“). Existuje několik způsobů zadání této funkce – my zvolíme ten nejpopisnější (i když ne zrovna nejelegantnější). Cantorova funkce $c : [0, 1] \to [0, 1]$ je definovaná takto:

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \\ \frac{3}{4} & \text{pro } x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right], \\ \frac{1}{8} & \text{pro } x \in \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right], \\ \frac{3}{8} & \text{pro } x \in \left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right], \\ \frac{5}{8} & \text{pro } x \in \left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right], \\ \frac{7}{8} & \text{pro } x \in \left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right], \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Jinak můžeme definici Cantorovy funkce popsat takto: Interval $[0, 1]$ rozdělíme na tři stejně dlouhé intervaly. Na prostředním intervalu definujeme funkci jako konstantní, nabývající hodnotu $1/2$. Oba zbylé intervaly zase rozdělíme na tři stejně dlouhé intervaly. Na prostředních intervalech definujeme funkci jako konstantní a to $1/4$ a $3/4$. Zbylé intervaly (už jsou čtyři) opět každý rozdělíme na tři části a pokračujeme v podobném duchu dál. Graf Cantorovy funkce je možno vidět na Obrázku 4.4.

Poznámka 4.8 Mluvíme-li o *reálné* funkci, myslíme tím, že jejími funkčními hodnotami jsou pouze reálná čísla. Také se můžeme setkat s funkcemi, jejichž funkční hodnoty jsou komplexní čísla – pak mluvíme o *komplexních* funkcích. Oproti tomu, mluvíme-li o reálné proměnné, myslíme tím, že definiční obor je podmnožinou reálných čísel, tzn. do funkce dosazujeme reálná čísla. Naproti tomu můžeme mít funkci komplexní proměnné, což je funkce, jejíž definiční obor je podmnožina komplexních čísel.



Obrázek 4.5: Graf rostoucí funkce.

4.2 Monotónní a ohraničené funkce

Definice 4.9 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je *na množině M*

- *rostoucí*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \,:\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$,
- *klesající*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \,:\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$,
- *neklesající*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \,:\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$,
- *nerostoucí*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \,:\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$.

Souhrnně říkáme, že f je *na množině M monotónní*. Je-li dokonce klesající nebo rostoucí, říkáme, že je *na množině M ryze monotónní*.

Příklad 4.10 Monotónnost funkce na daném intervalu se velmi dobře dá vidět z grafu funkce. Na Obrázku 4.5 vidíme graf rostoucí funkce.

Definice 4.11 Funkce se nazývá *zdola ohraničená/shora ohraničená/ohraničená*, je-li takový její obor hodnot. Funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme nazýváme *zdola ohraničenou/shora ohraničenou/ohraničenou* na množině $M \subset \mathcal{D}(f)$, jestliže je taková množina $f(M)$.

Cvičení 4.12 Dokažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na množině $M \subset \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když

$$\exists K \in \mathbb{R}, K > 0 \; \forall x \in M \,:\, |f(x)| \leq K.$$

Definice 4.13 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq M \subset \mathcal{D}(f)$. Pak definujeme

$$\sup_M f = \sup f(M) = \sup\{f(x) \; ; \; x \in M\},$$
$$\inf_M f = \inf f(M) = \inf\{f(x) \; ; \; x \in M\}$$

a nazýváme postupně *supremum/infimum funkce f na množině M*. A dále

$$\max_M f = \max f(M) = \max\{f(x) \; ; \; x \in M\},$$
$$\min_M f = \min f(M) = \min\{f(x) \; ; \; x \in M\},$$

kterým říkáme postupně *maximum/minimum funkce f na množině M, neboli největší/nejmenší funkční hodnota funkce f na množině M* (pokud tato čísla vůbec existují).

Poznámka 4.14 Zřejmě platí, že funkce f je na množině M

- ohraničená zdola právě tehdy, když $\inf f(M) \in \mathbb{R}$,
- ohraničná shora právě tehdy, když $\sup f(M) \in \mathbb{R}$,
- neohraničená zdola právě tehdy, když $\inf f(M) = -\infty$,
- neohraničená shora právě tehdy, když $\sup f(M) = \infty$.

4.3 Parita a periodicita

Představme si tři vlastnosti funkce: lichost, sudost a periodičnost.

Definice 4.15 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má definiční obor symetrický podle nuly, tzn. pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *sudá* (resp. *lichá*), jestliže

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \; : \; f(-x) = f(x) \quad (\text{resp. } f(-x) = -f(x))\,.$$

Sudost/lichost funkce souhrnně nazýváme *paritou funkce*.

Poznámka 4.16 Reprezentativním příkladem sudé, resp. liché funkce, je funkce mocninná s přirozenou mocninou. Jde o funkci s definičním oborem rovným $\mathbb{R}$ a předpisem x^k, kde $k \in \mathbb{N}$. Přitom platí, že je-li $k \in \mathbb{N}$ sudé, pak

$$(-x)^k = (-1)^k x^k = x^k,$$

tedy jde o sudou funkci, a je-li $k \in \mathbb{N}$ liché, pak

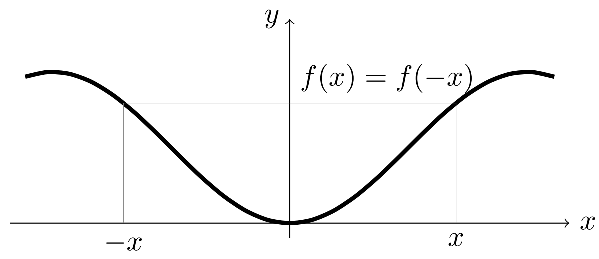
$$(-x)^k = (-1)^k x^k = -x^k,$$

tedy jde o lichou funkci. Je asi jasné, odkud pojmy lichosti/sudosti získaly své názvy.

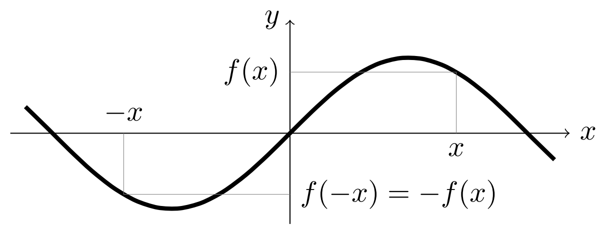
Příklad 4.17 Dokažte, že

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

je sudá funkce.



Obrázek 4.6: Graf sudé funkce.



Obrázek 4.7: Graf liché funkce.

Řešení. Definiční obor funkce f je celá množina $\mathbb{R}$, tedy symetrická podle počátku. Dále pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x). \qquad \bigcirc$$

Poznámka 4.18 Parita funkce má velmi názorný geometrický význam, který plyne přímo z její definice. Graf sudé funkce je osově symetrický podle osy y, protože

$$(x, y) \in \text{graf } f \quad \Leftrightarrow \quad (-x, y) \in \text{graf } f.$$

Graf liché funkce je středově symetrický podle počátku, protože

$$(x, y) \in \text{graf } f \quad \Leftrightarrow \quad (-x, -y) \in \text{graf } f.$$

Dokažte tyto ekvivalence. Na Obrázku 4.6 vidíme graf sudé funkce a na Obrázku 4.7 je načtrtnut graf liché funkce.

Definice 4.19 Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má p-periodický definiční obor, tzn. pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x \pm p \in \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je *p-periodická*, jestliže

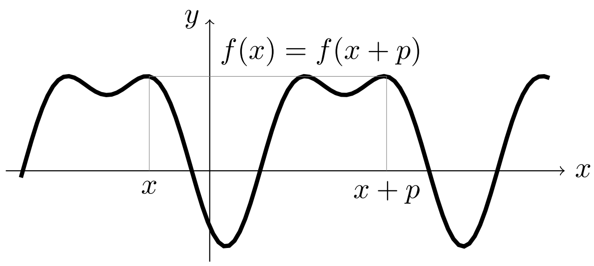
$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \;:\; f(x + p) = f(x).$$

Poznámka 4.20 Je-li p perioda funkce f, $n \in \mathbb{N}$, pak np je také perioda funkce f. Nejznámější periodické funkce jsou např. funkce sinus a kosinus mající periody 2π, 4π, atd. Nejzajímavější je perioda nejmenší, takže se zmiňuje právě tato. Dále, periodické funkce jsou i funkce tangens a kotangens, mající nejmenší periodu π.

Příklad 4.21 Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \sin 2x + \cos 3x$$

periodická. Najděte její periodu.



Obrázek 4.8: Graf periodické funkce s periodou p.

Řešení. Definiční obor funkce f je množina všech reálných čísel, což je p-periodická množina pro každé $p > 0$. Pokusme se nyní určit periodu této funkce. Jak už víme z předchozího studia, funkce sin a cos jsou periodické funkce s nejmenší periodou 2π, tzn. platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \wedge \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Odtud plyne, že funkce s předpisem $\sin 2x$ má periody

$$\pi, 2\pi, 3\pi, \dots,$$

protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x$$

Podobně zjistíme, že cos má periody

$$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{6}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \dots$$

Z Poznámky 4.20 vidíme, že nejmenší společnou periodou obou funkcí je 2π (jde o nejmenší společný násobek period[1] těchto dvou funkcí). Opravdu, pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin 2(x + 2\pi) + \cos 3(x + 2\pi) \\ &= \sin(2x + 4\pi) + \cos(3x + 6\pi) = \sin 2x + \cos 3x = f(x). \end{aligned} \qquad \bigcirc$$

Poznámka 4.22 Periodickou funkci poznáme z jejího grafu velmi jednoduše. „Posunemeli“ graf funkce ve směru osy x doprava o periodu této funkce, dostaneme stejnou množinu, protože

$$(x, y) \in \text{graf } f \quad \Leftrightarrow \quad (x + p, y) \in \text{graf } f,$$

kde p je perioda funkce f. Na Obrázku 4.8 vidíme graf periodické funkce.

4.4 Základní operace s funkcemi

Nejprve si představme aritmetické operace s funkcemi – tzn. funkce můžeme sčítat, odčítat, násobit i dělit. Následuje přesná definice.

[1] Násobkem periody rozumíme součin této periody s přirozeným číslem.

Definice 4.23 Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definujeme

- *součet/rozdíl funkcí* f a g takto:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad x \in \mathcal{D}(f \pm g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

- *součin funkcí* f a g takto:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

- *podíl funkcí* f a g takto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in \mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathcal{D}(f) \cap \{x \in \mathcal{D}(g) \; ; \; g(x) \neq 0\}.$$

Vytvářet nové funkce budeme také jejich skládáním a v případě, že jsou prosté, budeme uvažovat funkce k nim inverzní. Všechny tyto pojmy máme už definované v Definicích 1.55, 1.57 a 1.60. Podívejme se, jak tyto pojmy vypadají speciálně pro funkce.

Poznámka 4.24 Jestliže pro funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

$$M = \{x \in \mathcal{D}(f) \; ; \; f(x) \in \mathcal{D}(g)\} \neq \emptyset,$$

Pak složenou funkcí $g \circ f$ je funkce daná předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in M.$$

Přitom funkce f se nazývá její *vnitřní složkou*, funkce g její *vnější složkou*. Její definiční obor je tedy množina M.

Příklad 4.25 Uvažujme funkce

$$f(x) = 1 - x^2, \; x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \; x \in [0, \infty).$$

Platí

$$\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; 1 - x^2 \in [0, \infty)\} = [-1, 1].$$

Tedy $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

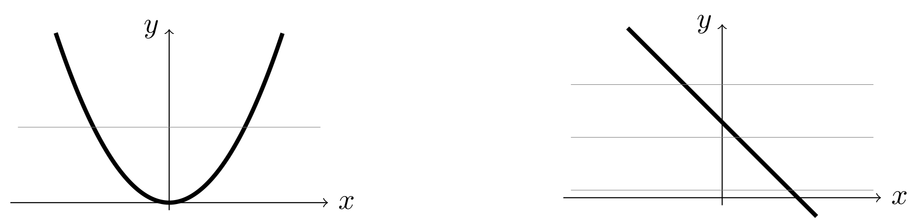
Poznámka 4.26 Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *prostá*, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) \; : \; x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Prostá funkce je tedy taková, která pro každé dva různé body definičního oboru nabývá různých funkčních hodnot. Prostotu funkce lze snadno určit z jejího grafu pomocí jednoduchého pravidla: jestliže existuje přímka rovnoběžná s osou x, která protíná graf funkce v alespoň dvou bodech, pak funkce není prostá; v opačném případě prostá je – viz Obrázek 4.9.

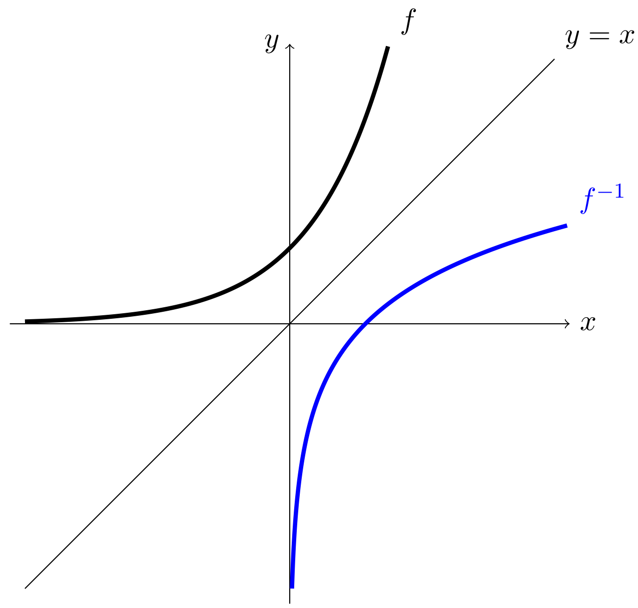
Poznámka 4.27 Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prostá, pak inverzní funkcí k funkci f je funkce f^{-1} : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ a každé $y \in \mathcal{H}(f)$ platí

$$f^{-1}(y) = x \; \Leftrightarrow \; f(x) = y.$$



(a) Není prostá. (b) Je prostá.

Obrázek 4.9: Jak zjistit prostotu funkce.



Obrázek 4.10: Graf funkce a funkce k ní inverzní.

Poznámka 4.28 Z definice inverzní funkce přímo plyne

$$\forall x \in \mathcal{D}(f)\ \forall y \in \mathcal{H}(f) \ :\ (x, y) \in \mathrm{graf}(f) \ \Leftrightarrow\ (y, x) \in \mathrm{graf}(f^{-1})$$

což znamená, že graf f^{-1} je obrazem grafu funkce f v osové souměrnosti podle osy $y = x$ (protože body o souřadnicích (x, y) a (y, x) jsou osově souměrné podle přímky $y = x$), viz Obrázek 4.10.

4.5 Elementární funkce

Doposud jsme pracovali s pojmem funkce a jejími vlastnostmi. Kromě toho jsme si říkali, jak pomocí již existujících funkcí definovat další funkce. Je ale nejprve potřeba vyjít z nějaké základní množiny jednoduchých funkcí. S těmito funkcemi jsme se setkali už i na základní a střední škole. Jde o následující typy funkcí:

- polynomy a racionální funkce,
- mocninné funkce,

- exponenciální a logaritmické funkce,
- goniometrické a cyklometrické funkce,
- hyperbolické a hyperbolometrické funkce.

Elementárními funkcemi pak rozumíme funkce z tohoto seznamu. Kromě toho, jsou-li f a g dvě elementární funkce, pak $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$ nazýváme také elementárními funkcemi (pokud jsou tyto funkce dobře definovány).

4.5.1 Polynomy

Polynomy jsou nejjednodušší možné funkce: v tom smyslu, že v jejich předpisu figuruje pouze sčítání a násobení.

Definice 4.29 Funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{D}(P) = \mathbb{R}$) definovanou předpisem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{4.1}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, nazýváme *polynomem* či *polynomiální funkcí*. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme *koeficienty polynomu* P. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslu n říkáme *stupeň polynomu* P, značí se st$P$ nebo $\deg P$.

Poznámka 4.30

(a) Všimněte si, že v Definici 4.29 není zmínka o stupni nulového polynomu. Nejde o opomenutí, stupeň nulového polynomu definován není (někdy se pro jednodušší formulace vět pokládá stupeň nulového polynomu jako -1 nebo $-\infty$).

(b) Součet, rozdíl a součin polynomů je opět polynom. Přitom jsou-li P, Q polynomy, pak

$$\deg(P \pm Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\} \quad \text{(nejsou-li } P,\ Q,\ P \pm Q \text{ nulové)},$$
$$\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q \quad \text{(nejsou-li } P,\ Q \text{ nulové)}.$$

(c) V předpisu polynonu se vyskytuje pouze sčítání a násobení. Je tedy bez problémů možné rozšířit definiční obor polynomu na množinu všech komplexních čísel. Takové funkce pak každému komplexnímu číslu přiřazují opět komplexní číslo. Toto rozšíření je vhodné vzhledem k definici komplexního kořenu polynomu – viz dále Definici 4.32. Komplexními kořeny se zde budeme zabývat hlavně kvůli tomu, že příslušná teorie je elegantnější – např. viz základní větu algebry či rozklad polynomu v $\mathbb{C}$.

(d) Do předpisu (4.1) lze dosazovat za x komplexní čísla, je tedy přirozené zabývat se polynomy s komplexními koeficienty, tzn. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Platí totiž řada důležitých tvrzení, které budou mít důležité důsledky pro polynomy s reálnými koeficienty s reálnou proměnnou. O polynomech s komplexními koeficienty budeme mluvit zejména v Poznámce 4.34. *Pokud nebude řečeno jinak, polynomem budeme rozumět polynom s reálnými koeficienty a reálnou proměnnou.*

(d) V dalším textu budeme občas používat obrat „polynom nejvýše n-tého stupně“, kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Mezi takové polynomy patří nulový polynom a polynomy všech stupňů menších nebo rovných n.

Poznámka 4.31 (krátce o komplexních číslech) Připomeňme jen potřebná fakta o komplexních číslech známá ze střední školy. Komplexním číslem budeme chápat výraz $a + b\mathrm{i}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je „číslo“ takové, že $\mathrm{i}^2 = -1$ (zřejmě i nemůže být reálné). Číslu a říkáme *reálná část* komplexního čísla, číslu b říkáme *imaginární část* komplexního čísla. Číslo i nazýváme *imaginární jednotka* a počítáme s ním jako s nenulovým reálným číslem s tím podstatným rozdílem, že

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Potom pro součet/rozdíl/součin komplexních čísel $a + b\mathrm{i}$ a $c + d\mathrm{i}$ platí:

$$\begin{aligned}
(a + b\mathrm{i}) \pm (c + d\mathrm{i}) &= (a \pm c) + (b \pm d)\mathrm{i}, \\
(a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) &= ac + (bc + ad)\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = ac - bd + (bc + ad)\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Pro zajímavost uveďme, jak určit reálnou a komplexní část podílu komplexních čísel:

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} \frac{c - d\mathrm{i}}{c - d\mathrm{i}} = \frac{(ac + bd) + (cb - da)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - da}{c^2 + d^2}\mathrm{i}.$$

Množinu všech komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$. Je-li $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ (tzn. $a, b \in \mathbb{R}$), pak komplexní číslo $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ nazýváme *komplexně sdruženým* k číslu z. Navíc pro $a, b \in \mathbb{C}$ platí

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a}\bar{b}.$$

Protože $a + 0\mathrm{i} = a \in \mathbb{R}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$, platí $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Jako je modelem množiny $\mathbb{R}$ přímka a tedy každé reálné číslo můžeme chápat jako bod na přímce, tak modelem množiny $\mathbb{C}$ je rovina a tedy každé komplexní číslo můžeme chápat jako bod roviny (tzv. Gaussovy roviny), kde reálná část komplexního čísla je x-ová souřadnice a imaginární část komplexního čísla je y-ová souřadnice. Tedy číslo $a + b\mathrm{i}$ si představujeme jako uspořádanou dvojici $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Gaussova rovina má dvě ortogonální osy souřadnic – reálnou (odpovídající množině reálných čísel) a imaginární.

Definice 4.32 Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ nazveme *k-násobným kořenem polynomu* P, existuje-li polynom Q tak, že α není kořenem Q (tzn. $Q(\alpha) \neq 0$) a

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Je-li $k = 1$, pak α nazýváme *jednoduchým kořenem polynomu* P. Číslo k se nazývá *násobnost kořene α polynomu P*. Je-li α kořen P, pak se polynom $(x - \alpha)$ nazývá *kořenový činitel polynomu P příslušný k α*.

Příklad 4.33 Určete všechny kořeny polynomu

$$P(x) = \left(x^3 - 1\right)^2.$$

Řešení. Použitím známého vzorce

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

dostáváme
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$
Odtud vidíme, že $P(1) = 0$, tedy 1 je kořenem polynomu P. Vyšetřeme, zda kvadratický polynom $x^2 + x + 1$ je pro nějaké x nulový, tzn. řešme kvadratickou rovnici
$$x^2 + x + 1 = 0.$$
Protože diskriminant $D = 1 - 4 = -3$ je záporný, dostáváme dvě komplexní řešení
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{|1-4|}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Tedy
$$P(x) = (x-1)^2 \left(x + \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$
Takže podle Definice 4.32 má polynom P tři kořeny
$$1, \quad -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
přitom všechny tři jsou násobnosti 2. Můžeme také říct (viz Základní větu algebry), že polynom P má „až na násobnost“ celkem šest kořenů – každý kořen počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost. ◯

Poznámka 4.34 (Krátce o polynomech s komplexními koeficienty) V této poznámce si shrňme některé základní vlastnosti platící pro polynomy *s komplexními koeficienty* (následně platící i pro polynomy s reálnými koeficienty, protože $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$):

(a) Je-li $\alpha \in \mathbb{C}$ kořenem polynomu P, pak existuje polynom Q takový, že
$$P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

(b) (Základní věta algebry) „*Každý polynom stupně alespoň jedna má alespoň jeden kořen.*“

(c) Z (a) a (b) pak společně se vzorcem pro stupeň součinu polynomů plyne: „*Každý polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ má právě n kořenů – každý počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.*“

(d) (Rozklad polynomu na součin kořenových činitelů v $\mathbb{C}$) *Každý polynom*
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, lze zapsat ve tvaru
$$P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{\ell_1} (x-\alpha_2)^{\ell_2} \ldots (x-\alpha_k)^{\ell_k},$$
kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ jsou právě všechny navzájem různé kořeny polynomu P násobností $\ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathbb{N}$. Přitom platí
$$\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_k = n.$$

Lemma 4.35. *Nechť $a \in \mathbb{R}$, P je polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak existují konstanty $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $b_n \neq 0$ tak, že*

$$P(x) = b_n(x-a)^n + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + b_1(x-a) + b_0.$$

Důkaz. V polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) lze nahradit (podle binomické věty) každý člen x^k výrazem

$$x^k = \big((x-a)+a\big)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (x-a)^\ell a^{k-\ell}.$$

Pak dostáváme žádané vyjádření polynomu, přitom $b_n = a_n \neq 0$. $\square$

Následující lemma je speciální případ tvrzení z Poznámky 4.34(a).

Lemma 4.36. *Nechť P je polynom stupně n ($n \in \mathbb{N}$) a $\alpha \in \mathbb{R}$ je jeho kořen. Pak existuje polynom Q stupně $n-1$ takový, že*

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

Důkaz. Podle Lemmatu 4.35 lze polynom P vyjádřit jako

$$P(x) = b_n(x-\alpha)^n + b_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1(x-\alpha) + b_0.$$

Pak $0 = P(\alpha) = b_0$. Odtud okamžitě plyne

$$P(x) = (x-\alpha)\big(b_n(x-\alpha)^{n-1} + b_{n-1}(x-\alpha)^{n-2} + \ldots + b_1\big)$$

kde výraz v druhé závorce je žádaný polynom Q stupně $n-1$. $\square$

Důsledek 4.37. *Nechť P je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho k-násobný kořen, kde $k \in \mathbb{N}$, $k < n$. Pak existuje polynom Q stupně $n-k$ takový, že $Q(\alpha) \neq 0$ a*

$$P(x) = (x-\alpha)^k Q(x).$$

Poznámka 4.38 (Hornerovo schema) Jak efektivně počítat funkční hodnoty polynomu? To se hodí třeba v případě, že chceme ověřit, zda dané číslo je či není kořenem polynomu. Podíváme-li se na obecný tvar polynomu z Definice 4.29, vidíme, že při dosazení nějakého čísla za jeho proměnnou nás čeká úmorný výpočet mocnin stejného čísla, která pak ještě musíme vynásobit koeficienty polynomu a to nakonec sečíst. Existuje něco jednoduššího? Odpovědí je *Hornerovo schéma*. Celá jeho myšlenka spočívá v chytrém zápisu polynomu – konkrétně ve změně pořadí jednotlivých operací: postupným vytýkáním proměnné. Platí totiž

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
&= (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1)x + a_0 \\
&= ((a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
&\quad \ldots \\
&= (\ldots(a_n x + a_{n-1})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0.
\end{aligned}$$

Chceme-li vypočítat hodnotu polynomu P v bodě α, stačí pak začít dosazovat do nejvnitřnější závorky a pak postupně dosazovat za $x = \alpha$ a k poslední – vnější závorce. Mezivýpočty si budeme označovat čísly $b_{n-1}, \ldots, b_0$, takže platí

$$\begin{aligned}
&b_{n-1} = a_n,\\
&b_{n-2} = b_{n-1}\alpha + a_{n-1},\\
&b_{n-3} = b_{n-2}\alpha + a_{n-2},\\
&\ldots,\\
&b_0 = b_1\alpha + a_1
\end{aligned}$$

a konečně

$$P(\alpha) = b_0\alpha + a_0.$$

Všimněte si např. že b_{n-2} je výsledek dosazení α do úplně vnitřní závorky, atp. Toto se mnohem přehledněji zapisuje to tabulky (tzv. Hornerova schematu):

$P(x)$	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_0	$P(\alpha)$

Je jasné, že α je kořenem polynomu P, jestliže na konci druhého řádku Hornerova schématu je nula. Zajímavé ale také je, že pro polynom, jehož koeficienty jsou právě vypočítané konstanty b_i, tzn. pro polynom

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0,$$

platí rovnost

$$P(x) = Q(x)(x - \alpha) + P(\alpha).$$

Ověřte dosazením do obou stran! Z toho plyne, že podílem polynomů P a $x-\alpha$ je polynom Q se zbytkem $P(\alpha)$. Nakonec dodejme, že Hornerovo schéma lze použít opakovaně, zjistit nejen násobnost příslušného kořene, ale také nalézt velice efektivně polynom Q z Důsledku 4.37.

Příklad 4.39 Zjistěte, zda je 1 kořenem polynomu

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3.$$

Pokud je kořenem, zjistěte jeho násobnost.

Řešení. Hornerovo schema pro polynom P a číslo α vypadá takto

$P(x)$	1	-5	7	-3
$\alpha = 1$	1	-4	3	0
$\alpha = 1$	1	-3	0	
$\alpha = 1$	1	-2		

Z druhého řádku Hornerova schematu vidíme, že číslo 1 je skutečně kořenem a platí

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 3).$$

Třetí řádek nám říká, že je dokonce kořenem alespoň násobnosti 2 a platí

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 3).$$

Čtvrtý řádek říká, že 1 je kořenem násobnosti 2. ◯

Poznámka 4.40 Nechť P je polynom s *reálnými* koeficienty.

(a) Pokud $\alpha \in \mathbb{C}$ je k-násobným kořenem polynomu P, je číslo $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ (komplexně sdružené k α) rovněž k-násobným kořenem polynomu P.

(b) Pro kořenové činitele příslušné komplexním kořenům $\alpha = u \pm iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ platí

$$\begin{aligned}(x-(u+iv))^k(x-(u-iv))^k &= [(x-(u+iv))(x-(u-iv))]^k \\ &= [((x-u)-iv)((x-u)+iv)]^k = \left[(x-u)^2+v^2\right]^k.\end{aligned}$$

Následující věta nám umožní pro naše potřeby obejít se bez komplexních čísel.

Věta 4.41 (o rozkladu na kořenové činitele polynomu v $\mathbb{R}$)**.** *Každý nenulový polynom*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

s ***reálnými*** *koeficienty, lze vyjádřit jako součin o činitelích v tomto tvaru:*

- a_n*,*
- $(x-\alpha)^k$*, pro každý reálný kořen* $\alpha \in \mathbb{R}$ *polynomu* P *násobnosti* $k \in \mathbb{N}$*,*
- $((x-u)^2+v^2)^k$*, pro každé dva komplexně sdružené komplexní kořeny* $\beta = u + \mathrm{i}v$*,* $\bar{\beta} = u - \mathrm{i}v$ *(*$u, v \in \mathbb{R}$*,* $v \neq 0$*) polynomu* P *násobnosti* k*.*

Důkaz. Podle Poznámky 4.34(d) a Poznámky 4.40(a) se polynom P dá zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}(x-\beta_1)^{\ell_1}(x-\bar{\beta}_1)^{\ell_1}\ldots(x-\beta_s)^{\ell_s}(x-\bar{\beta}_s)^{\ell_s},$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ jsou navzájem různé kořeny násobností $k_1, \ldots, k_r$ a β_1, $\bar{\beta}_1$, β_2, $\bar{\beta}_2$, $\ldots, \beta_s$, $\bar{\beta}_s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ jsou navzájem různé kořeny násobností $\ell_1, \ell_1, \ell_2, \ell_2, \ldots, \ell_s, \ell_s$. Označíme-li $\beta_i = u_i + \mathrm{i}v_i$ pro $i = 1, \ldots, s$, pak podle Poznámky 4.40(b) dostáváme

$$(x-\beta_i)^{\ell_i}(x-\bar{\beta}_i)^{\ell_i} = [(x-u_i)^2+v_i^2]^{\ell_i}.$$

□

Poznámka 4.42 Kvadratické výrazy $(x-u)^2+v^2$ v tvrzení Věty 4.41 se zapisují spíše ve tvaru x^2+px+q se záporným diskriminantem (tj. $D = p^2-4q < 0$).

Příklad 4.43 Rozložte v $\mathbb{R}$ polynomy

$$P(x) = x^4 + 1$$

a

$$Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}P(x) = x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 \\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

Snadno spočítáme, že diskriminant kvadratických polynomů za poslední rovností je záporný, tedy skutečně jde o rozklad polynomu v $\mathbb{R}$. V druhém případě počítáme takto:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3(x^2+x+1) - (x^2+x+1) = (x^3-1)(x^2+x+1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2+x+1)^2. \end{aligned}$$

Opět, snadno spočítáme, že diskriminant polynomu x^2+x+1 je záporný. Tedy příklad je vyřešen. Poznamenejme, že pokud bychom se pokoušeli o rozklad polynomu v $\mathbb{C}$, je třeba ještě najít komplexní kořeny kvadratického polynomu. ◯

4.5.2 Racionální funkce

Definice 4.44 Nechť P, Q jsou nenulové polynomy. Pak funkce

$$R = \frac{P}{Q}$$

se nazývá *racionální (lomená) funkce.* Tuto funkci nazveme *ryze lomenou (neboli ryzí racionální)*, jestliže $\deg P < \deg Q$ a *neryze lomenou*, jestliže $\deg P \geq \deg Q$.

Poznámka 4.45

(i) Definiční obor racionální funkce $R = P/Q$ je množina

$$\{x \in \mathbb{R} \; ; \; Q(x) \neq 0\}$$

neboli $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou kořeny Q.

(ii) Je-li $\deg P \geq \deg Q$ pak existují polynomy P_1, P_2, $\deg P_2 < \deg Q$ tak, že

$$\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q}$$

(tzn. dělení polynomu polynomem, které známe ze střední školy). Smysl tohoto faktu spočívá v tom, že P_2/Q je *ryze* lomená funkce.

Lemma 4.46. *Nechť $R = P/Q$ je ryzí racionální funkce a x_0 je reálný k-násobný kořen polynomu Q, tzn.*

$$Q(x) = Q_1(x)(x-x_0)^k,$$

kde $Q_1(x_0) \neq 0$. Pak existují taková reálná čísla $A_1, \dots, A_k$, že pro všechna $x \in \mathcal{D}(R)$ platí

$$R(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-x_0)^j} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kde P_1 je buď nulový polynom nebo $\deg P_1 < \deg Q_1$.

Důkaz. Proveďme matematickou indukcí vzhledem ke $k \in \mathbb{N}$. Dokažme nejprve tvrzení pro $k = 1$. Nechť x_0 je jednoduchý kořen polynomu Q, tedy platí $Q(x) = Q_1(x)(x - x_0)$, kde

$Q_1(x_0) \neq 0$ a $\deg Q_1 = \deg Q - 1$. Protože je funkce R ryzí lomená, platí pak $\deg Q_1 \geq \deg P$. Máme dokázat existenci $A_1 \in \mathbb{R}$ a polynomu P_1 tak, že $\deg P_1 < \deg Q_1$ a

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)(x - x_0)} = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

což je ekvivalentní s rovností

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)(x - x_0)} = \frac{A_1 Q_1(x) + (x - x_0)P_1(x)}{Q_1(x)(x - x_0)},$$

tedy $P(x) = A_1 Q_1(x) + (x - x_0)P_1(x)$, a to lze napsat jako

$$P(x) - A_1 Q_1(x) = (x - x_0)P_1(x). \tag{4.2}$$

Tyto úvahy nás přivedly k myšlence uvažovat polynom $S(x) = P(x) - A_1 Q_1(x)$, kde položíme

$$A_1 = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}.$$

Zřejmě $\deg S \leq \max\{\deg P, \deg Q_1\} = \deg Q_1$ a x_0 je kořenem polynomu S, protože

$$S(x_0) = P(x_0) - \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} Q_1(x_0) = 0.$$

Podle Lemmatu 4.36 existuje polynom P_1 takový, že $S(x) = (x - x_0)P_1(x)$. Tím jsme dostali platnost (4.2). Navíc, je-li P_1 nenulový, pak platí $\deg P_1 + 1 = \deg S \leq \deg Q_1$, tedy $\deg P_1 < \deg Q_1$.

Proveďme nyní indukční krok. Nechť pro $k \in \mathbb{N}$ věta platí. Dokažme, že platí také pro $k + 1$. Uvažujme ryzí lomenou funkci $R = P/Q$, tedy polynom P, $x_0 \in \mathbb{R}$ a polynom Q_1 takový, že $Q_1(x_0) \neq 0$, $Q(x) = (x - x_0)^{k+1} Q_1(x)$. Z faktu, že R je ryzí, dostáváme nerovnost $\deg P < \deg Q_1 + k$. Dokažme nejprve, že existuje konstanta A_{k+1} a polynom P_0 tak, že $\deg P_0 < \deg Q_1 + k$ (nebo P_0 je nulový) a

$$\frac{P(x)}{(x - x_0)^{k+1} Q_1(x)} = \frac{A_{k+1}}{(x - x_0)^{k+1}} + \frac{P_0(x)}{(x - x_0)^k Q_1(x)}, \tag{4.3}$$

což je podobně jako v počátečním kroku ekvivalentní s

$$P(x) - A_{k+1} Q_1(x) = (x - x_0)P_0(x).$$

Definujme polynom $S(x) = P(x) - A_{k+1} Q_1(x)$, kde položíme

$$A_{k+1} = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}.$$

Protože x_0 je opět kořenem polynomu S, podle Lemmatu 4.36 existuje polynom P_0 tak, že $S(x) = (x - x_0)P_0(x)$. Je-li P_0 nulový polynom, pak z (4.3) plyne tvrzení věty pro $k + 1$ a důkaz je ukončen. V opačném případě pokračujeme dál a platí

$$\deg P_0 = \deg S - 1 \leq \deg Q_1 + k,$$

tzn. $\deg P_0 < \deg Q_1 + k$. Odtud plyne, že racionální funkce

$$\frac{P_0(x)}{(x - x_0)^k Q_1(x)}$$

je ryzí a $Q_1(x_0) \neq 0$. Tato racionální funkce tedy splňuje indukční předpoklad a tedy pak existují konstanty $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}$ a polynom P_1, $\deg P_1 < \deg Q_1$ (nebo nulový P_1) tak, že

$$\frac{P_0(x)}{(x-x_0)^k Q_1(x)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-x_0)^j} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Dosazením této rovnosti do (4.3) dostáváme požadované tvrzení pro $k+1$. □

Lemma 4.47. *Nechť $R = P/Q$ je ryzí racionální funkce a $x_0 = u + iv$ je komplexní (tzn. $v \neq 0$) k-násobný kořen polynomu $Q(x)$, tzn.*

$$Q(x) = [(x-u)^2 + v^2]^k Q_1(x), \quad Q_1(x_0) \neq 0.$$

Pak existují taková reálná čísla B_1, C_1, B_2, C_2, …, B_k, C_k, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{B_j x + C_j}{[(x-u)^2 + v^2]^j} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kde P_1 je buď nulový polynom nebo $\deg P_1 < \deg Q_1$.

Důkaz. Provede se podobným způsobem jako důkaz předchozího lemmatu. □

Zlomky tvaru

$$\frac{A}{(x-x_0)^k}, \qquad \frac{Bx + C}{[(x-u)^2 + v^2]^k}$$

jsou v jistém smyslu nejjednodušší ryzí racionální funkce, říkáme jim *parciální zlomky.* Z předchozích dvou lemmat plyne následující důležitá věta.

Věta 4.48. *(o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky) Každá ryzí racionální funkce se dá vyjádřit jako součet parciálních zlomků. Přitom každému k-násobném reálném kořenu x_0 jmenovatele odpovídá součet k parciálních zlomků tvaru*

$$\frac{A_1}{x-x_0}, \frac{A_2}{(x-x_0)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-x_0)^k}$$

a každému komplexnímu k-násobnému kořenu $u \pm iv$ jmenovatele odpovídá součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x-u)^2 + v^2}, \frac{B_2 x + C_2}{[(x-u)^2 + v^2]^2}, \dots, \frac{B_k x + C_k}{[(x-u)^2 + v^2]^k}.$$

Poznámka 4.49 Hodnoty konstant v parciálních zlomcích nalezneme metodou neurčitých koeficientů, tzn. napíšeme formální tvar rozkladu a vynásobíme jmenovatelem rozkládané racionální funkce. Dostáváme tak rovnost dvou polynomů. Porovnáním koeficientů u příslušných členů, dosazením za x vhodná čísla, nebo kombinací obou nalezneme neznámé koeficienty.

Příklad 4.50 Rozložte na parciální zlomky racionální funkce

(a) $P(x) = \frac{2x+7}{x^2-9x+18}$,

(b) $Q(x) = \frac{x+2}{x^3-x}$,

(c) $R(x) = \frac{x^3+1}{x^4-x^3}$,

(d) $S(x) = \frac{3x^2+x+2}{x^3-1}$.

Řešení.

(a) Protože $x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$, podle Věty 4.48 existují konstanty $A, B \in \mathbb{R}$ tak, že
$$\frac{2x+7}{x^2-9x+18} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-6}.$$
Vynásobíme obě strany nerovnosti jmenovatelem rozkládané racionální funkce a dostáváme
$$2x + 7 = A(x-6) + B(x-3).$$
Ukažme si dvě nejjednodušší metody nalezení konstant A a B:

(i) Dva polynomy jsou si rovny právě tehdy, když jsou si rovny koeficienty u členů se stejnou mocninou. Porovnáme-li koeficienty u lineárního členu, dostáváme rovnost
$$2 = A + B$$
a porovnáme-li absolutní členy, pak dostaneme
$$7 = -6A - 3B.$$
Máme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých A, B. Řešením je $A = -13/3$, $B = 19/3$.

(ii) Do vzniklé rovnice dosadíme $x = 6$ (tedy jeden z kořenů jmenovatele) a dostáváme
$$2 \cdot 6 + 7 = B(6-3),$$
odkud snadno spočítáme, že $B = 19/3$. Dosadíme-li za $x = 3$ (tedy druhý z kořenů jmenovatele) dostáváme podobně $A = -13/3$.

Tedy v obou případech dostáváme
$$\frac{2x+7}{x^2-9x+18} = -\frac{13}{3}\frac{1}{x-3} + \frac{19}{3}\frac{1}{x-6}.$$

(b) Zřejmě platí
$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1).$$
Podle Věty 4.48 existují konstanty $A, B, C \in \mathbb{R}$ takové, že
$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$
Vynásobíme obě strany polynomem $x^3 - x$ a dostáváme
$$x + 2 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$
Dosadíme-li postupně do rovnice za $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$, dostáváme hodnoty jednotlivých konstant: $A = -2$, $B = \frac{3}{2}$ a $C = \frac{1}{2}$.

(c) Snadno vypočteme, že
$$x^4 - x^3 = x^3(x-1).$$
Pak podle Věty 4.48 existují konstanty $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ takové, že
$$\frac{x^3+1}{x^4-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1},$$
Vynásobíme obě strany výrazem $x^4 - x^3$, pak dostáváme
$$x^3 + 1 = Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) + Dx^3.$$
Dosadíme $x = 0$ a dostáváme $C = -1$. Dosadíme $x = 1$ a dostáváme $D = 2$. Zbývá najít hodnoty neznámých A a B. To provedeme porovnáním koeficientů u příslušných mocnin. Protože již hledáme pouze dvě konstanty, stačí nám k tomu pouze dvě rovnice. Nejjednodušší rovnice dostaneme porovnáním koeficientů u členů s nejvyššími a nejnižšími mocninami. Např. porovnáme-li koeficienty členů s mocninou x^3 a x^2 dostáváme postupně $A = -1$ a $B = -1$.

(d) Protože
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1),$$
pak podle Věty 4.48 existují konstanty $A, B, C \in \mathbb{R}$ takové, že
$$S(x) = \frac{3x^2+x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$
Vynásobíme-li tuto rovnost jmenovatelem polynomu S dostáváme následující rovnost polynomů:
$$3x^2 + x + 2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1).$$
Dosazením $x = 1$ do této rovnosti dostáváme, že $A = 2$. Porovnáním koeficientů u členu x^2 dostáváme $B = 1$ a porovnáním absolutních členů dostaneme $C = 0$. Tedy platí
$$S(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1}.$$
○

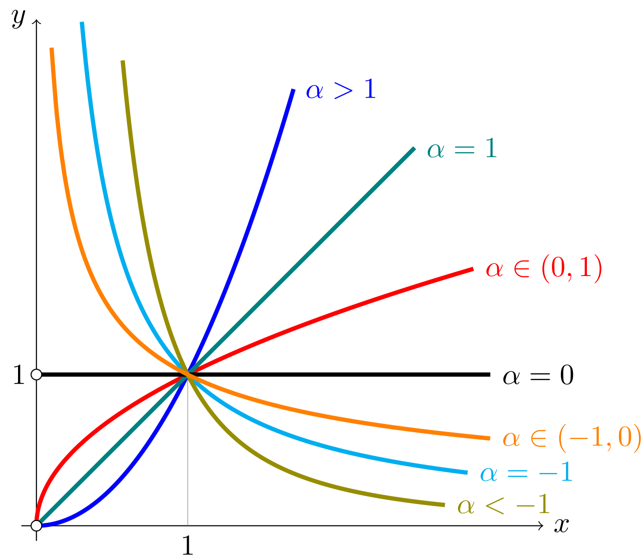
4.5.3 Mocninné a exponenciální funkce

V předpisech následujících funkcí se vyskytuje obecná mocnina. Přitom u mocninné funkce je v základu proměnná a v exponentu je konstanta. U exponenciální funkce je to naopak, v základu se vyskytuje konstanta a v exponentu proměnná.

Definice 4.51 Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkce
$$x \mapsto x^\alpha, \quad x \in (0, \infty)$$
se nazývá *mocninnou funkcí* (o exponentu α). Značí se pow_α.

Poznámka 4.52

(i) $\mathcal{D}(\mathrm{pow}_\alpha) = (0, \infty)$, $\alpha \neq 0$ a tedy $\mathcal{H}(\mathrm{pow}_\alpha) = (0, \infty)$.



Obrázek 4.11: Grafy funkcí pow_α pro různé hodnoty parametru α.

(ii) Funkce pow_α je pro $\alpha > 0$ rostoucí a pro $\alpha < 0$ klesající.

(iii) Graf funkce pow_α pro různé hodnoty parametru α lze vidět na Obrázku 4.11.

(iv) Pro některé speciální hodnoty čísla α je $\mathcal{D}(\mathrm{pow}_\alpha)$ větší než $(0, \infty)$, a to podle toho, pro které x je výraz x^α definován (viz Definice 2.28, 2.35). Zejména:

  (1) pro $\alpha \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{D}(\mathrm{pow}_\alpha) = \mathbb{R}$ (jde vlastně o polynom α-tého stupně),

  (2) pro $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \leq 0$ je $\mathcal{D}(\mathrm{pow}_\alpha) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

  (3) pro $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a zlomek $\frac{m}{n}$ je v základním tvaru, přitom

    (a) n je liché a $m > 0$, pak $\mathcal{D}(\mathrm{pow}_\alpha) = \mathbb{R}$,

    (b) n je liché a $m < 0$, pak $\mathcal{D}(\mathrm{pow}_\alpha) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

    (c) n je sudé a $m > 0$, pak $\mathcal{D}(\mathrm{pow}_\alpha) = [0, \infty)$.

(v) Častěji se mocninná funkce značí svým předpisem, tzn. např. místo pow_5 píšeme x^5.

Definice 4.53 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkci

$$x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

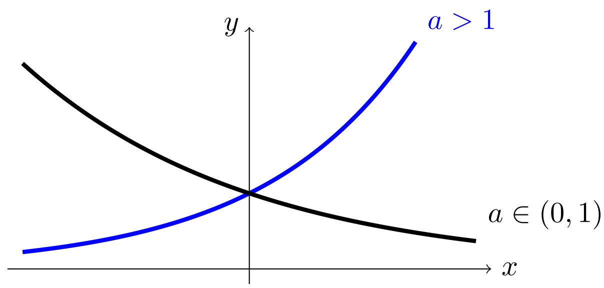
nazýváme *exponenciální funkcí o základu a*, značíme $\exp_a$.

Poznámka 4.54

(i) Je-li $a = 1$, je exponenciální funkce konstantní (tzn. není prostá). Jde vlastně o polynom nultého stupně. Taková exponenciální funkce není pro nás zajímavá, a proto ji z našich úvah budeme většinou vylučovat.

(ii) Funkce $\exp_a$ je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a \in (0, 1)$ (tedy je prostá).

(iii) Pro $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ platí $\mathcal{D}(\exp_a) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\exp_a) = (0, \infty)$.



Obrázek 4.12: Grafy funkcí $\exp_a$ pro $a > 1$ a $a \in (0, 1)$.

(iv) Grafem exponenciální funkce je tzv. exponenciála – viz Obrázek 4.12.

(v) Nejdůležitější mezi exponenciálními funkcemi je ta se základem $a = \mathrm{e}$ (tzv. *přirozená exponenciální funkce*), místo $\exp_{\mathrm{e}}$ se píše pouze exp.

(vi) Pro jednoduchost se často exponenciální funkce značí svým předpisem, tzn. např. místo $\exp_5$ píšeme jen 5^x.

Cvičení 4.55 Dokažte, že pro $a > 0$ je graf funkce $\exp_{\frac{1}{a}}$ obrazem grafu funkce $\exp_a$ v osové souměrnosti podle osy y.

4.5.4 Logaritmické funkce

Definice 4.56 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Inverzní funkce k exponenciální funkci o základu a nazýváme *logaritmickou funkcí o základu* a, značí se $\log_a x$, tzn.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}, y > 0 :\ \log_a y = x \ \Leftrightarrow\ a^x = y.$$

Poznámka 4.57 Z faktu, že je logaritmická funkce inverzní k exponenciální, plyne řada jejích vlastností:

(i) Pro $a > 0$, $a \neq 1$ platí

$$\mathcal{D}(\log_a) = (0, \infty), \quad \mathcal{H}(\log_a) = \mathbb{R}.$$

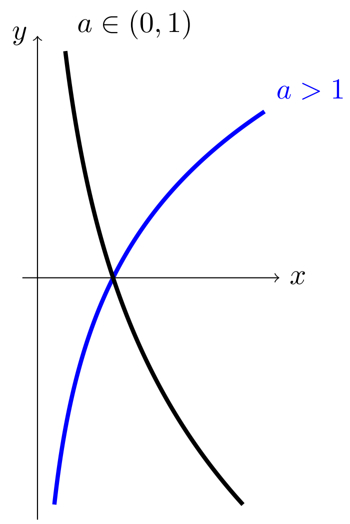
(ii) Funkce $\log_a$ je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a \in (0, 1)$.

(iii) Z Poznámky 1.61(iii) plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$a^{\log_a x} = x$$

a pro všechna $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ platí

$$\log_a a^y = y.$$



Obrázek 4.13: Grafy funkcí $\log_a$ pro $a > 1$ a $a \in (0,1)$.

(iv) Z předchozího se dají odvodit následující vzorce:

$$\begin{aligned} \log_a x^\alpha &= \alpha \log_a x, \\ \log_a xy &= \log_a x + \log_a y, \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y, \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}, \\ a^\alpha &= b^{\alpha \log_b a} \end{aligned}$$

pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x, y > 0$. Dokažte je. Poslední dvě rovnosti používáme zejména pro $a = \mathrm{e}$.

(v) Graf logaritmické funkce je osově symetrický k exponenciále podle osy $y = x$ – viz Obrázek 4.13.

(vi) Nejdůležitější mezi logaritmickými funkcemi je ta o základu $a = \mathrm{e}$ (tzv. *přirozená logaritmická funkce*), místo $\log_\mathrm{e}$ píšeme ln.

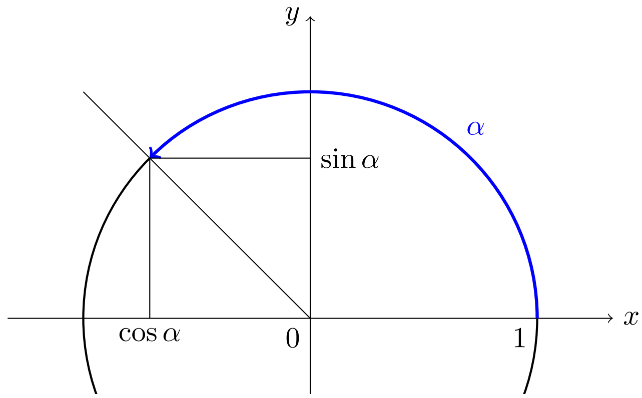
4.5.5 Goniometrické funkce

Začněme funkcemi sinus (sin) a kosinus (cos). Existuje několik definic těchto funkcí. Nám bude stačit *geometrická* definice pomocí jednotkové kružnice. Vyskytují se v ní pojmy jako *orientovaný úhel*, *radián* a *délka křivky*, kteréžto pojmy chápeme jen intuitivně.

Uvažujme *jednotkovou kružnici* (to je kružnice se středem v počátku a poloměru 1, tzn. jde o množinu všech bodů v rovině o souřadnicích (x, y) splňující rovnost $x^2 + y^2 = 1$). Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je orientovaný úhel s počátkem na kladné poloose x. Uvažujme tento úhel v radiánech, tedy jde o „orientovanou délku"[2] příslušné části jednotkové kružnice. Připomeňme, že délka

[2] To znamená, že začínáme v bodě o souřadnicích $(1,0)$ a je-li $\alpha > 0$ obíháme kružnici proti směru hodinových ručiček, v opačném případě je $-\alpha$ délka oběhnuté křivky – přitom kružnici můžeme oběhnout i několikrát.

jednotkové kružnice je 2π. Pak y-ová souřadnice bodu na jednotkové kružnici je rovna $\sin\alpha$ a x-ová souřadnice tohoto bodu je rovna $\cos\alpha$ – viz Obrázek 4.14. Tímto jsou tyto dvě funkce definované na celé množině všech reálných čísel.



Obrázek 4.14: Geometrická definice funkcí sin a cos.

Poznámka 4.58 Z naší „definice“ můžeme vidět spoustu vlastností těchto dvou funkcí:

(i) $\mathcal{D}(\sin) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\sin) = [-1, 1]$. Funkce je lichá, 2π-periodická funkce.

(ii) $\mathcal{D}(\cos) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\sin) = [-1, 1]$. Funkce je sudá, 2π-periodická funkce.

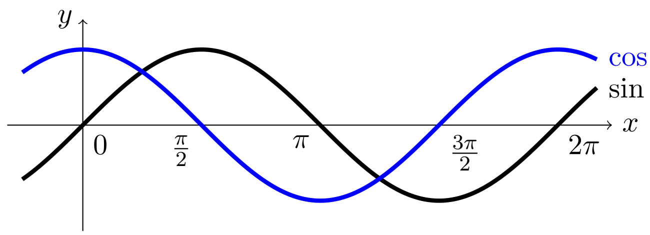
(iii) Z Obrázku 4.14 s využitím definice sinu a kosinu úhlu v pravoúhlém trojúhelníku ze základní školy lze poměrně snadno spočítat hodnoty funkcí v některých význačných bodech „z prvního kvadrantu“:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(iv) Platí tzv. *součtové* vzorce: Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

(v) Grafy funkcí sin a cos jsou načtrnuty na Obrázku 4.15. Odtud je vidět celá řada symetrií, které mají grafy těchto funkcí. Např. graf funkce sin je středově symetrický podle počátku, ale je také středově symetrický podle bodů $(k\pi, 0)$ (kde $k \in \mathbb{Z}$) a osově symetrický podle přímek $x = \pi/2 + k\pi$ (kde $k \in \mathbb{Z}$). To má za následek, že hodnoty těchto funkcí stačí znát pouze v intervalu $[0, \pi/2]$ (tzn. 1. kvadrant), protože všechny ostatní se dají z těchto symetrií (a využitím periodičnosti funkcí) vyjádřit jako hodnoty funkce sin a cos na tomto intervalu. Tato fakta ovšem plynou již z geometrické definice.



Obrázek 4.15: Grafy funkcí sin a cos.

Cvičení 4.59 S využitím informací z Poznámky 4.58 dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
3. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
4. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$,
5. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,
6. $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$,
7. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
8. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,
9. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$,
10. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$,
11. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$,
12. $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$,
13. $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$,
14. $\sin(x + \pi/2) = \cos x$,
15. $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$,
16. $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$.

Konečně můžeme definovat i funkce tangens a kotangens – již korektní definicí:

Definice 4.60 Funkci definovanou předpisem

$$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

nazýváme funkce *tangens*, značíme tg.
Funkci definovanou předpisem

$$x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

nazýváme funkce *kotangens*, značíme cotg.

Poznámka 4.61 Funkce tg a cotg mají následující vlastnosti:

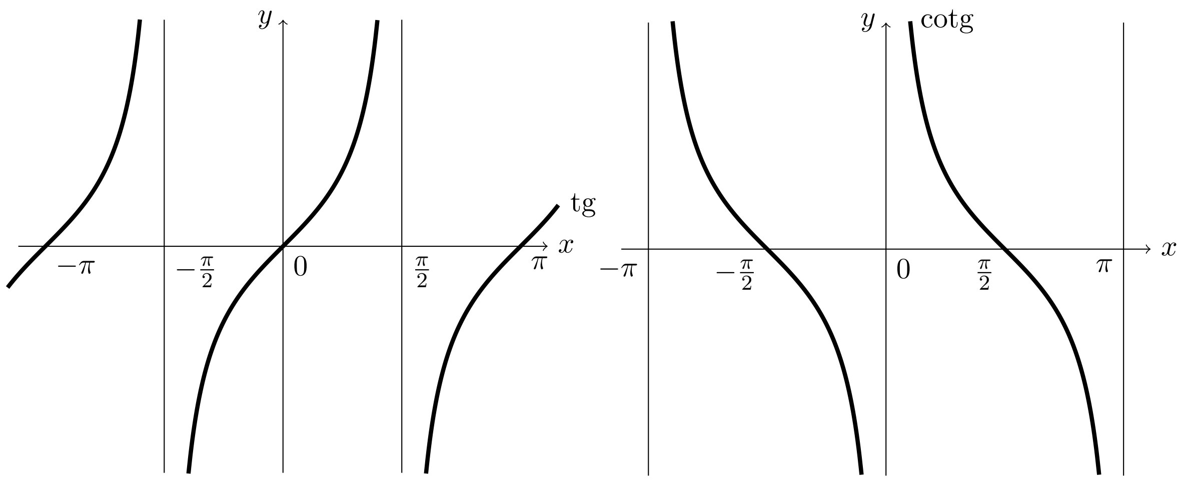
(i) $\mathcal{H}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$. Funkce tg je lichá, π-periodická funkce.

(ii) $\mathcal{H}(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R}$. Funkce cotg je sudá, π-periodická funkce.

(iii) Tyto funkce nabývají ve význačných bodech „z prvního kvadrantu“ těchto hodnot:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$
$\operatorname{cotg} x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

(iv) Grafy funkcí tg a cotg jsou načtrnuty na Obrázcích 4.16a a 4.16b.



(a) Graf funkce tg.

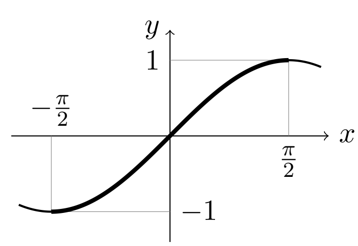
(b) Graf funkce cotg.

Obrázek 4.16: Grafy funkcí tangens a cotangens.

4.5.6 Cyklometrické funkce

Tyto funkce jsou „skoro inverzní" ke goniometrickým funkcím. Totiž kvůli periodicitě, goniometrické funkce **nejsou prosté** na svých definičních oborech, tedy nemají inverzní funkce. Přesto potřebujeme definovat inverzní hodnoty těchto funkcí. Bude nám stačit definovat inverzní funkce pouze k restrikcím goniometrických funkcí na jistých intervalech (na nichž jsou tyto funkce prosté).

Příklad 4.62 Funkce sin je definovaná na celém $\mathbb{R}$ a není prostá. Ale funkce $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ již prostá funkce je, viz Obrázek 4.17.



Obrázek 4.17: Restrikce funkce sin na intervalu $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Poznámka 4.63 Pohledem na grafy goniometrických funkcí můžeme snadno odtušit, že následující funkce jsou prosté:

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}, \quad \cos|_{[0,\pi]}, \quad \operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}, \quad \operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}.$$

K těmto funkcím tedy existují funkce inverzní.

Definice 4.64 Funkce arcsin, arccos, arctg, arccotg definujeme takto:

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \quad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \quad \operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Nazýváme je po řadě *arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens* a *arkus kotangens.*

Poznámka 4.65 Shrňme základní vlastnosti cyklometrických funkcí:

(i) $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, funkce arcsin je rostoucí a lichá.

(ii) $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$, $\mathcal{H}(\arccos) = [0, \pi]$, funkce arccos je klesající.

(iii) $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, funkce arctg je rostoucí a lichá.

(iv) $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$, funkce arccotg je klesající.

(v) Grafy lze snadno načrtnout – viz Obrázek 4.18 a 4.19.

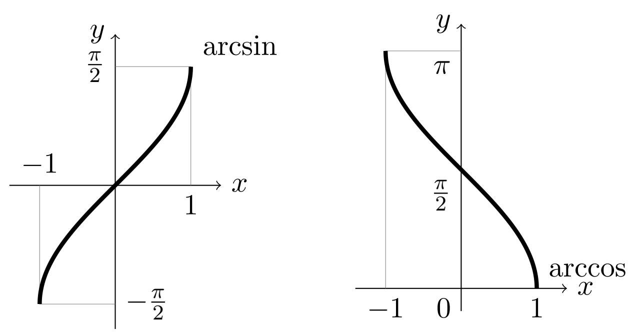
(vii) Známé funkční hodnoty a limity v krajních bodech definičních oborů:

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

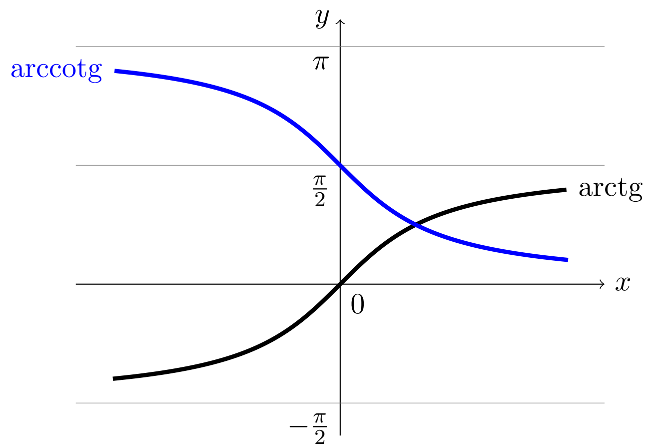
x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$



Obrázek 4.18: Grafy funkcí arcsin a arccos.



Obrázek 4.19: Grafy funkcí arctg a arccotg.

4.5.7 Hyperbolické funkce

Funkce goniometrické jsme definovali tak, že popisovaly parametricky kružnici, konkrétně, bod $(\cos t, \sin t)$, pro $t \in \mathbb{R}$ leží na jednotkové kružnici (protože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Pro hyperbolické funkce platí něco podobného, akorát místo pro kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = 1$ to platí pro hyperbolu o rovnici $y^2 - x^2 = 1$. V tomto případě si ale můžeme dovolit přesnou definici.

Definice 4.66 Funkci definovanou předpisem

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

nazýváme *hyperbolický sinus* a značíme sh.
Funkci definovanou předpisem

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

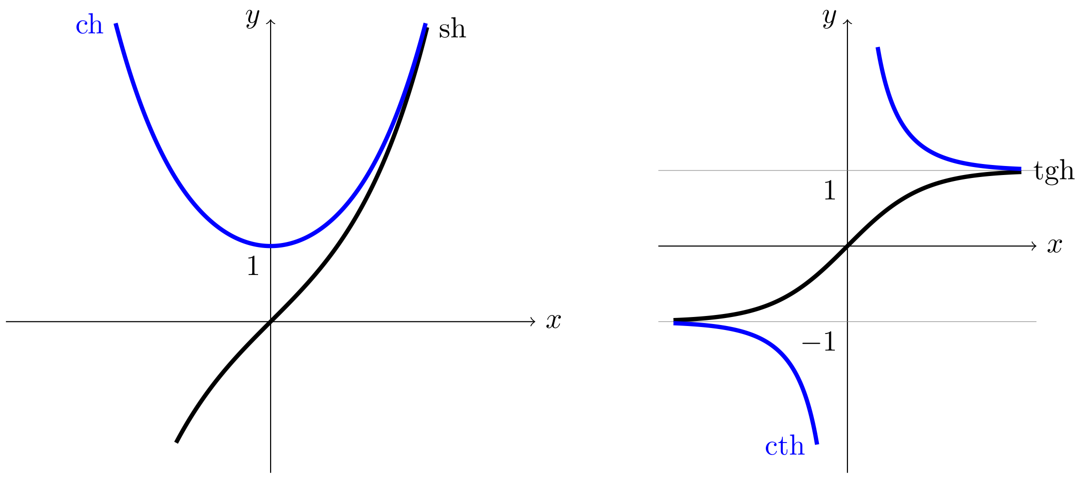
nazýváme *hyperbolický kosinus* a značíme ch.
Funkci definovanou předpisem

$$x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

nazýváme *hyperbolický tangens* a značíme tgh.
Funkci definovanou předpisem

$$x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

nazýváme *hyperbolický kotangens* a značíme cth.



(a) Grafy funkcí sh a ch.

(b) Grafy funkcí tgh a cth.

Obrázek 4.20: Grafy hyperbolických funkcí.

Poznámka 4.67 Z předpisu hyperbolických funkcí snadno vyšetříme některé jejich vlastnosti:

- $\mathcal{D}(\mathrm{sh}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\mathrm{sh}) = \mathbb{R}$, funkce sh je rostoucí (tedy prostá) a lichá.
- $\mathcal{D}(\mathrm{ch}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\mathrm{ch}) = [1, \infty)$, funkce ch je sudá.
- $\mathcal{D}(\mathrm{tgh}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\mathrm{tgh}) = (-1, 1)$, funkce tgh je rostoucí (tedy prostá) a lichá.
- $\mathcal{D}(\mathrm{cth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(\mathrm{cth}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, funkce cth je prostá a lichá.
- Grafy těchto funkcí je možné vidět na Obrázcích 4.20a a 4.20b.
- Platí $\mathrm{sh}\, 0 = 0$, $\mathrm{ch}\, 0 = 1$.

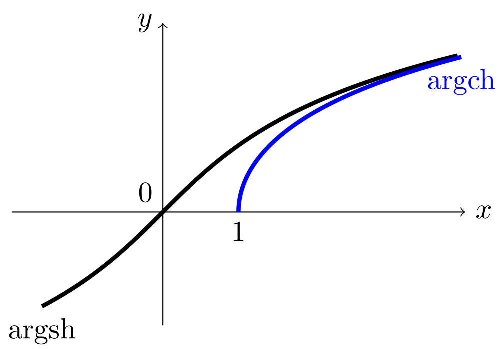
Cvičení 4.68 Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

1. $\mathrm{sh}(x - y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y - \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, x$,
2. $\mathrm{ch}(x - y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y - \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$,
3. $\mathrm{sh}\, 2x = 2\, \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x$,
4. $\mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$,
5. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$,
6. $\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\, 2x - 1}{2}$,
7. $\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\, 2x + 1}{2}$,
8. $\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^x$,
9. $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^{-x}$,
10. $\mathrm{tgh}\, x = \frac{1}{\mathrm{cth}\, x}$,
11. $\mathrm{cth}\, x = \frac{1}{\mathrm{tgh}\, x}$, pro $x \neq 0$.

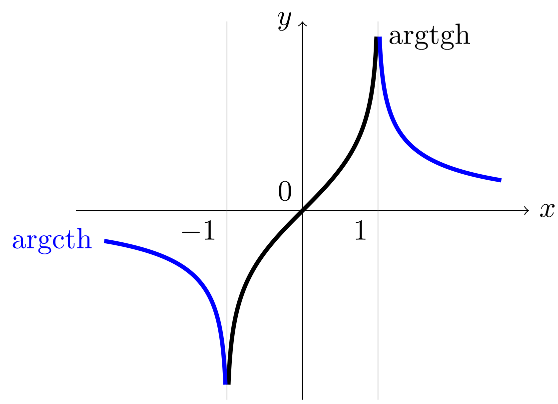
4.5.8 Hyperbolometrické funkce

Funkce sh, ch, cth jsou prosté na svých definičních oborech, funkce ch prostá není, ale funkce $\mathrm{ch}_{|[0,\infty)}$ již prostá je. Funkce inverzní k hyperbolickým funkcím (popř. restrikci ch na interval $[0, \infty)$) nazýváme *hyperbolometrické*.

Definice 4.69 Inverzní funkce k funkcím sh, ch $|_{[0,\infty)}$, tgh a cth nazýváme po řadě *argument hyperbolického sinu, kosinu, tangens a kotangens* a značíme argsh, argch, argth a argcth.



(a) Grafy funkcí argsh a argch.



(b) Grafy funkcí argtgh a argcth.

Obrázek 4.21: Grafy hyperbolometrických funkcí.

Poznámka 4.70 Shrňme základní vlastnosti hyperbolometrických funkcí:

- $\mathcal{D}(\mathrm{argsh}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\mathrm{argsh}) = \mathbb{R}$, funkce argsh je lichá.
- $\mathcal{D}(\mathrm{argch}) = [0, \infty)$, $\mathcal{H}(\mathrm{argch}) = [0, \infty)$.
- $\mathcal{D}(\mathrm{argcth}) = (-1, 1)$, $\mathcal{H}(\mathrm{argcth}) = \mathbb{R}$, funkce argcth je rostoucí a lichá.
- $f(x) = \mathrm{argcotgh}\, x (= \mathrm{argcth}\, x) : \mathcal{D}(\mathrm{argcth}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $\mathcal{H}(\mathrm{argcth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce argcth je lichá.
- Grafy těchto funkcí je možné vidět na Obrázku 4.21.

Cvičení 4.71 Dokažte, že platí

1. $\mathrm{argsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$,
2. $\mathrm{argch}\, x = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in [0, \infty)$,
3. $\mathrm{argth}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1, 1)$,
4. $\mathrm{argcth}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Kapitola 5

Limita a spojitost funkce

Pojem limity jsme již slyšeli, ovšem v souvislosti s posloupnostmi reálných čísel. Zajímalo nás, co se děje s členy posloupnosti se stále rostoucím indexem. Nyní se budeme bavit o limitách funkcí. Myšlenka bude stejná, tedy zkusíme stavět na tom, co již umíme. U posloupností jsme zkoumali, co se děje s n-tým členem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, když n bereme „čím dál větší a větší" – konkrétně nás zajímalo, jestli se neomezeně přibližuje k nějakému reálnému číslu (vlastní limita), popř. se „zvětšuje nad či zmenšuje pod všechny meze" (nevlastní limita). U funkcí máme již více možností. Bude nás zajímat, co se děje s funkční hodnotou $f(x)$ funkce f, přibližuje-li se x k nějaké hodnotě či roste nad resp. klesá pod všechny meze.

5.1 Definice limity a spojitosti v bodě

U posloupností jsme rozlišovali tři typy limit: vlastní, ∞ a $-\infty$, přitom je lze zahrnout do jediné definice. Typů limit funkcí je celkem devět. Opět je budeme schopni pomocí pojmu okolí napsat do jedné všezahrnující definice (viz dále Definici 5.15). Nejprve si ale jednotlivé typy limit postupně představíme.

5.1.1 Vlastní limita ve vlastním bodě

Budeme se ptát, zda se funkční hodnoty funkce f v bodech x přibližují neomezeně k nějakému reálnému číslu $L \in \mathbb{R}$ (budeme mu pak říkat *vlastní limita*), pokud se x neomezeně přibližuje k nějakému reálnému číslu $x_0 \in \mathbb{R}$.

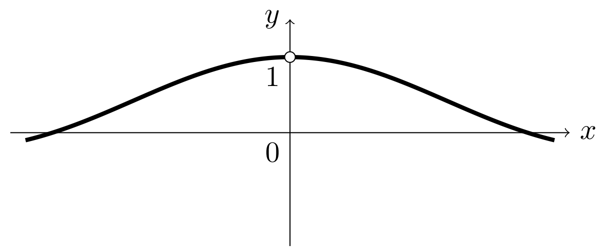
Podívejme se na jeden konkrétní příklad.

Příklad 5.1 Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zajímá nás „k čemu se přibližují" funkční hodnoty $f(x)$ funkce f, „blíží-li se argument x k nule". Vypočítejme několik funkčních hodnot:

$$\begin{aligned} f(0{,}1) &\doteq 0.9983341664, \\ f(0{,}01) &\doteq 0.9999833334, \\ f(0{,}001) &\doteq 0.9999998333, \\ f(0{,}0001) &\doteq 0.9999999983. \end{aligned}$$



Obrázek 5.1: Graf funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na intervalu $[-3.5, 3.5]$.

Vidíme, že počítáme-li funkční hodnoty funkce f v číslech, které jsou čím dál bližší nule, vypočítané funkční hodnoty se „(neomezeně) přibližují" k číslu jedna. Přitom funkce f není v bodě nula vůbec definovaná. Graf funkce f je na Obrázku 5.1. ◯

Hlavní důvod, proč se otázkami vznesenými v předchozím příkladu zabývat, se dozvíme v kapitole o derivaci funkce.

Definice 5.2 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je definovaná na nějakém* $\mathcal{R}(x_0)$, jestliže existuje $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že

$$\mathcal{R}(x_0) \subset \mathcal{D}(f).$$

Tuto zkratku budeme používat i pro další typy okolí bodu x_0.

Definice 5.3 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má *ve vlastním bodě x_0 vlastní limitu L*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \ 0 < |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - L| < \varepsilon,$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon(L) \ \exists \mathcal{R}_\delta(x_0) : \ f(\mathcal{R}_\delta(x_0)) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

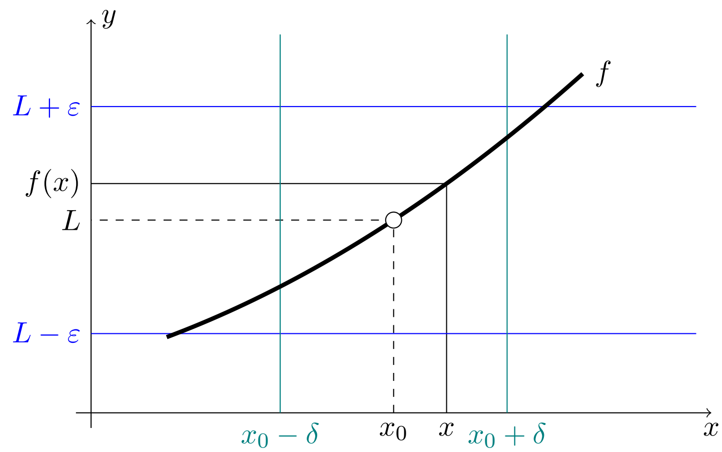
Píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Poznámka 5.4 (a) Všimněme si důležitého předpokladu v Definici 5.3, což je existence okolí $\mathcal{R}(x_0)$ takového, že $\mathcal{R}(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$. Důvodem tohoto vztahu mezi x_0 a $\mathcal{D}(f)$ je to, abychom „se mohli s x přibližovat **libovolně blízko** k x_0". Asi by nemělo smysl, definovat limitu funkce ln v bodě -1 (proč asi?). Technicky vzato, tato podmínka musí platit už jen proto, aby výraz $f(\mathcal{R}_\delta(x_0))$ z výroku v Definici 5.3 byl dobře definován. Pro jednoduchost v tomto výroku nebudeme explicitně psát, že $\mathcal{R}_\delta(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$ – budeme to mlčky předpokládat.

(b) Funkce f nemusí být v x_0 definovaná – zajímají nás funkční hodnoty f pouze na nějakém redukovaném okolí bodu x_0.

(c) Místo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ se někdy píše „$f(x) \to L$ pro $x \to x_0$".

(d) Ještě jednou: funkce f má v bodě x_0 limitu L, jestliže



Obrázek 5.2: Definice vlastní limity funkce ve vlastním bodě.

- pro libovolně malé $\varepsilon > 0$
- lze najít $\delta > 0$
- tak, že pro $\forall x \in \mathbb{R}$ splňující $0 < |x - x_0| < \delta$ (neboli $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$),
- platí $|f(x) - L| < \varepsilon$ (neboli $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L)$).

Viz Obrázek 5.2.

(e) Důležité je také umět znegovat výrok z definice limity. Platí, že L není limitou funkce f v bodě x_0 právě tehdy, když

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta\ :\ |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

neboli

$$\exists \mathcal{U}_\varepsilon(L)\ \forall \mathcal{R}_\delta(x_0)\ :\ f(\mathcal{R}_\delta(x_0)) \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(L) \neq \emptyset.$$

Příklad 5.5 Dokažte, že

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle definice limity máme být schopni nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí implikace

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Nechť $x \in \mathbb{R}$ je takové, že $0 < |x - 1| < \delta$ (konkrétní hodnotu čísla δ ještě neznáme – teprve se ho pokusíme určit). Všimněte si, že z první nerovnosti plyne $x \neq 1$ a tedy výraz $(x^2 - 1)/(x - 1)$ je definovaný. Navíc pro takové x platí

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1|.$$

Pro dané ε lze položit

$$\delta = \varepsilon,$$

protože je-li $0 < |x-1| < \delta = \varepsilon$, pak

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1| < \varepsilon.$$

○

5.1.2 Spojitost v bodě

Zavedení pojmu vlastní limity ve vlastním bodě jsme motivovali tím, že bychom rádi určili číslo, ke kterému se neomezeně přibližují funkční hodnoty $f(x)$, přibližuje-li se neomezeně argument x k nějakému číslu x_0, které *nepatří* do definičního oboru funkce f. Pojem limity funkce je ale užitečný i v případě, že x_0 naopak *leží* v definičním oboru funkce f – velmi důležitá je totiž otázka, zda se $f(x)$ neomezeně přibližují k $f(x_0)$, jestliže se x neomezeně přibližuje k x_0.

Definice 5.6 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{U}(x_0)$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0, jestliže

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Poznámka 5.7 (a) Z Definice 5.6 ihned plyne, že je-li funkce v daném bodě spojitá, má v tomto bodě vlastní limitu.

(b) Předpoklad v Definici 5.6 lze říci jednoduše pomocí pojmu vnitřní bod: „x_0 je vnitřní bod definičního oboru funkce f“ nebo také „$x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$“ – viz Definici 2.57.

(c) Není těžké ověřit, že za předpokladu, že $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) funkce f je spojitá v bodě x_0,

(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \delta\ :\ |f(x) - L| < \varepsilon$,

(iii) $\forall \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))\ \exists \mathcal{U}_\delta(x_0)\ \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$

(iv) $\forall \mathcal{U}(f(x_0))\ \exists \mathcal{U}(x_0)\ \forall x \in \mathcal{U}(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0))$

(v) $\forall \mathcal{U}(f(x_0))\ \exists \mathcal{U}(x_0)\ :\ f(\mathcal{U}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0))$

Tato ekvivalentní vyjádření spojitosti budeme často využívat v důkazech! Výroky jsou ilustrovány na Obrázku 5.3. Všimněme si rozdílů mezi těmito ekvivalentními výroky a výroky z definice limity funkce. Důležitý je zejména fakt, že nyní nás zajímá celé okolí bodu x_0, tedy i funkční hodnota v tomto bodě.

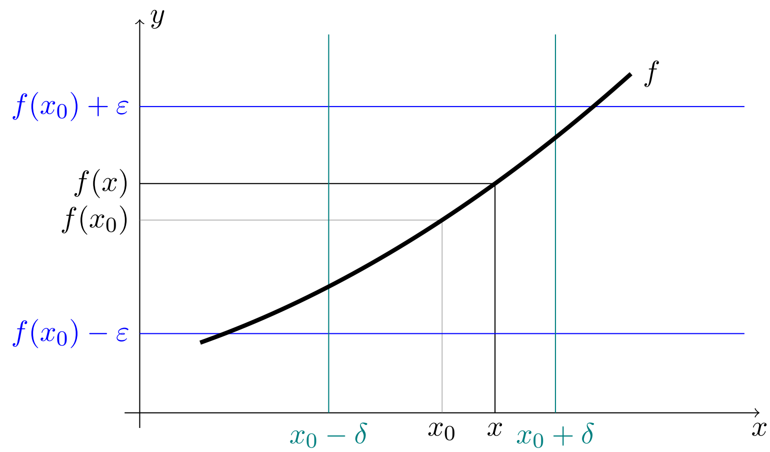
Příklad 5.8 Dokažte, že funkce $f(x) = x^2$ je spojitá v bodě π.

Řešení. Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Máme dokazovat

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - \pi| < \delta\ :\ |x^2 - \pi^2| < \varepsilon.$$

Vezmeme $\varepsilon > 0$ libovolné. Je-li $|x - \pi| < 1$, tedy

$$\begin{aligned} -1 &< x - \pi < 1, \\ \pi - 1 &< x < \pi + 1, \\ 2\pi - 1 &< x + \pi < 2\pi + 1. \end{aligned}$$



Obrázek 5.3: Spojitost funkce f v bodě x_0.

Zvolíme $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2\pi + 1)\}$. Protože pak bude pro všechna $x \in D(f)$ splňující

$$|x - \pi| < \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2\pi + 1}\right\}$$

(tedy $|x - \pi| < 1$ a zároveň $|x - \pi| < \varepsilon/(2\pi + 1)$) platit

$$|x^2 - \pi^2| = |(x - \pi)(x + \pi)| = |x - \pi||x + \pi| < \delta(x + \pi) < \frac{\varepsilon}{2\pi + 1}(2\pi + 1) = \varepsilon.$$

Tedy f je spojitá v π. ○

Poznámka 5.9 A co vlastně znamená výsledek z Příkladu 5.8 prakticky? Představme si, že jsme postaveni před úkol, vypočítat hodnotu čísla π^2. Protože číslo π je iracionální, nikdy nejsme schopni toto číslo vyjádřit přesně, ale vždy jen jeho přibližnou hodnotu (teoreticky jsme vždy schopni najít přibližnou hodnotu čísla π s jakoukoliv přesností). Vezmeme přibližnou hodnotu čísla π, označme ho třeba písmenem x. Očekáváme pak, že číslo x^2 bude dostatečně blízké číslu π^2. Je to na místě? V Příkladu 5.8 jsme dokázali, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - \pi| < \delta\ :\ |x^2 - \pi^2| < \varepsilon.$$

Pomaleji: Zvolme si $\varepsilon > 0$ libovolně. K němu se nám vždy podaří najít číslo $\delta > 0$ (i když může být hodně malé) takové, že pro všechna x, která se od π liší o méně než δ, si můžeme být jistí tím, že číslo x^2 se bude od π^2 lišit o méně než ε. Tedy parametr ε zde figuruje jako *požadovaná přesnost našeho výsledku*, přitom spojitost nám zaručuje, že naše očekávání je namístě. Je třeba zmínit fakt, že se v definici spojitosti ale nic neříká jak moc velké to δ má být, mluví se pouze o jeho samotné existenci.

5.1.3 Nevlastní limita a limita v nevlastním bodě

Nyní si představme oněch osm zbývajících definic limity funkce.

Definice 5.10 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má *ve vlastním bodě* x_0 *nevlastní limitu*

(a) ∞, jestliže

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta\ :\ f(x) > h,$$

píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$,

(b) $-\infty$, jestliže

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta\ :\ f(x) < h$$

píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Poznámka 5.11 Podobnými úvahami jako v Poznámce 3.32 se lze přesvědčit, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall \mathcal{U}(\infty)\ \exists \mathcal{R}(x_0)\ :\ f(\mathcal{R}(x_0)) \subset \mathcal{U}(\infty)$$

a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall \mathcal{U}(-\infty)\ \exists \mathcal{R}(x_0)\ :\ f(\mathcal{R}(x_0)) \subset \mathcal{U}(-\infty),$$

Definice 5.12 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(\infty)$. Řekneme, že funkce f má *v nevlastním bodě* ∞

(i) *vlastní limitu* $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > k\ :\ |f(x) - L| < \varepsilon,$$

píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$,

(ii) *nevlastní limitu* ∞, jestliže

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > k\ :\ f(x) > h,$$

píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$,

(iii) *nevlastní limitu* $-\infty$, jestliže

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > k\ :\ f(x) < h,$$

píšeme $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Definice 5.13 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(-\infty)$. Řekneme, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má *v nevlastním bodě* $-\infty$

(i) *vlastní limitu* $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < k\ :\ |f(x) - L| < \varepsilon,$$

píšeme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$,

(ii) *nevlastní limitu* ∞, jestliže

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < k\ :\ f(x) > h,$$

píšeme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$,

(iii) *nevlastní limitu* $-\infty$, jestliže

$$\forall h \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < k\ :\ f(x) < h,$$

píšeme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Poznámka 5.14 Výroky z Definic 5.12 a 5.13 lze opět přepsat za pomoci pojmu okolí čísla z $\mathbb{R}^*$. Platí, že

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad &\iff \quad \forall \mathcal{U}(L)\ \exists \mathcal{R}(\infty)\ :\ f(\mathcal{R}(\infty)) \subset \mathcal{U}(L),\\
\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad &\iff \quad \forall \mathcal{U}(\infty)\ \exists \mathcal{R}(\infty)\ :\ f(\mathcal{R}(\infty)) \subset \mathcal{U}(\infty),\\
\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad &\iff \quad \forall \mathcal{U}(-\infty)\ \exists \mathcal{R}(\infty)\ :\ f(\mathcal{R}(\infty)) \subset \mathcal{U}(-\infty),\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad &\iff \quad \forall \mathcal{U}(L)\ \exists \mathcal{R}(-\infty)\ :\ f(\mathcal{R}(-\infty)) \subset \mathcal{U}(L),\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad &\iff \quad \forall \mathcal{U}(\infty)\ \exists \mathcal{R}(-\infty)\ :\ f(\mathcal{R}(-\infty)) \subset \mathcal{U}(\infty),\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad &\iff \quad \forall \mathcal{U}(-\infty)\ \exists \mathcal{R}(-\infty)\ :\ f(\mathcal{R}(-\infty)) \subset \mathcal{U}(-\infty),
\end{aligned}$$

Příklady funkcí s jednotlivými typy limit jsou ukázány na Obrázku 5.4

Shrňme všechny předchozí definice limit funkce do definice jediné!

Definice 5.15 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *má v bodě* x_0 *limitu* L, jestliže

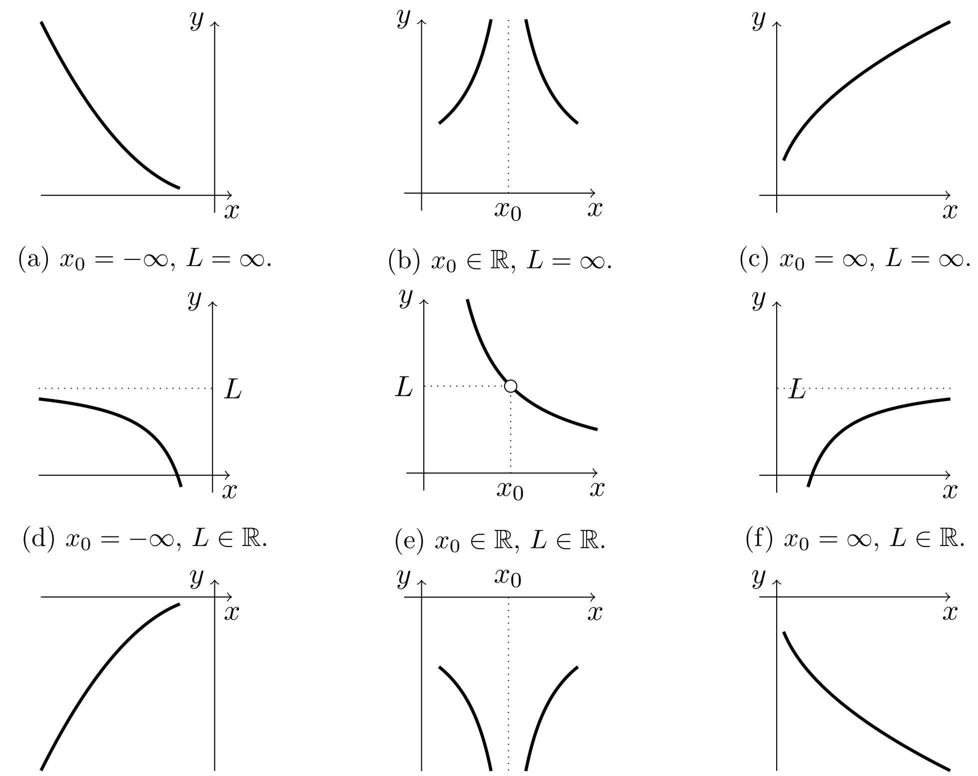
$$\forall \mathcal{U}(L)\ \exists \mathcal{R}(x_0)\ \forall x \in \mathcal{R}(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{U}(L)$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}(L)\ \exists \mathcal{R}(x_0)\ :\ f(\mathcal{R}(x_0)) \subset \mathcal{U}(L).$$

Píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, nebo $f(x) \to L$ pro $x \to x_0$.

Poznámka 5.16 Je velmi vhodné všímat si podobností mezi limitou posloupnosti a limitou funkce (vskutku není čistě náhodná). Definici pojmu limity posloupnosti předcházela definice pojmu „pro skoro všechna n“ neboli „pro dostatečně velké n“. Zde bychom mohli



(a) $x_0 = -\infty$, $L = \infty$. (b) $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \infty$. (c) $x_0 = \infty$, $L = \infty$.

(d) $x_0 = -\infty$, $L \in \mathbb{R}$. (e) $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$. (f) $x_0 = \infty$, $L \in \mathbb{R}$.

(g) $x_0 = -\infty$, $L = -\infty$. (h) $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = -\infty$. (i) $x_0 = \infty$, $L = -\infty$.

Obrázek 5.4: Limita L funkce f v bodě x_0.

nadefinovat analogický pojem. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $V(x)$ výroková funkce pro $x \in \mathbb{R}$, slovním spojením „$V(x)$ platí pro x dostatečně blízká číslu x_0“ rozumíme výrok: existuje $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}(x_0)$ platí $V(x)$. Pak výrok v Definici 5.15 by šel přeformulovat takto:

$$\forall \mathcal{U}(L) \;:\; f(x) \in \mathcal{U}(L) \text{ pro všechna } x \text{ dostatečně blízká } x_0.$$

5.1.4 Jednostranné limity a spojitost

Všimněme si, že limita funkce *ve vlastním bodě* závisí na funkčních hodnotách funkce na nějakém redukovaném okolí tohoto bodu. Někdy potřebujeme zjišťovat limitní chování funkce pouze na pravém či levém redukovaném okolí – dostáváme tak další pojmy – *limitu zprava a zleva ve vlastním bodě.*

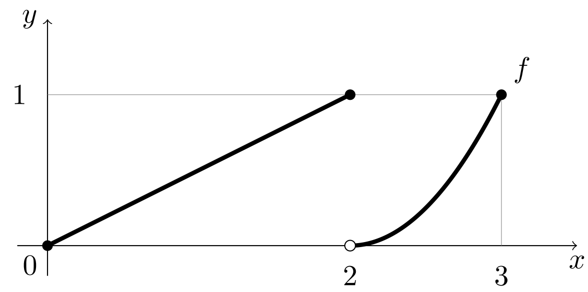
Definice 5.17 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}^+(x_0)$ (resp. $\mathcal{R}^-(x_0)$), kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v $x_0 \in \mathbb{R}$ *limitu zprava (resp. zleva)* rovnu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \mathcal{U}(L)\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, x_0 < x < x_0 + \delta \;:\; f(x) \in \mathcal{U}(L).$$

(resp.

$$\forall \mathcal{U}(L)\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x < x_0 \;:\; f(x) \in \mathcal{U}(L).)$$

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = L$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = L$).



Obrázek 5.5: Graf funkce z Příkladu 5.19.

Poznámka 5.18 Definici jednostranných limit lze samozřejmě zapsat pomocí okolí bodu x_0, např.:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0+} f(x) = L \;&\Leftrightarrow\; \forall\mathcal{U}(L)\ \exists\mathcal{R}^+(x_0)\ \forall x\in\mathcal{R}^+(x_0)\ :\ f(x)\in\mathcal{U}(L),\\ &\Leftrightarrow\; \forall\mathcal{U}(L)\ \exists\mathcal{R}^+(x_0)\ :\ f(\mathcal{R}^+(x_0))\subset\mathcal{U}(L).\end{aligned}$$

Příklad 5.19 Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x\in[0,2],\\ (x-2)^2 & \text{pro } x\in(2,3].\end{cases}$$

Vypočtěte jednostranné limity v bodě $x_0 = 2$.

Řešení. Platí

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+}(x-2)^2 = 0,$$

protože při výpočtu limity je třeba brát funkční hodnoty $f(x)$ pro $x > 2$. Ze stejného důvodu pak

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}\frac{x}{2} = 1.$$

Graf funkce je načrtnut na Obrázku 5.5. ○

Platí následující jednoduchý ale důležitý vztah mezi limitou a jednostrannými limitami.

Věta 5.20. *Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$. Pak existuje $\lim_{x\to x_0} f(x)$ právě tehdy, když existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$, které jsou si rovny. Navíc, pokud tyto limity existují, jsou stejné.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť existuje limita funkce f v bodě x_0 – označme ji L. Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ libovolně. Podle Definice 5.3 existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ tak, že pro všechna $x\in\mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí $f(x)\in\mathcal{U}_\varepsilon(L)$. Pak

- pro každé $x\in\mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ platí $f(x)\in\mathcal{U}_\varepsilon(L)$, tzn. existuje limita funkce f v bodě x_0 zprava a je rovna L, a také
- pro každé $x\in\mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ platí $f(x)\in\mathcal{U}_\varepsilon(L)$, tzn. existuje limita funkce f v bodě x_0 zleva a je rovna L.

($\Leftarrow$): Nechť nyní existují obě jednostranné limity funkce f v bodě x_0 a jsou rovny společné hodnotě $L\in\mathbb{R}$. Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ libovolně. Pak

- existuje $\mathcal{R}^-_{\delta_1}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}^-_{\delta_1}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L)$ a
- existuje $\mathcal{R}^+_{\delta_2}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}^+_{\delta_2}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L)$.

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (pak totiž $\mathcal{R}_\delta(x_0) \subset \mathcal{R}^-_{\delta_1}(x_0) \cup \mathcal{R}^+_{\delta_2}(x_0)$). Pak pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L)$. Dokázali jsme, že $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a je rovna L. □

Definice 5.21 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{U}^+(x_0)$ (resp. $\mathcal{U}^-(x_0)$), $x_0 \in \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f je *spojitá zprava (resp. zleva) v bodě* x_0, jestliže

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0) \qquad \Big(\text{resp. } \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)\Big).$$

Poznámka 5.22 Není těžké ověřit, že za předpokladu, že existuje $\mathcal{U}^\pm(x_0)$ takové, že $\mathcal{U}^\pm(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) funkce f je spojitá v bodě x_0 zprava/zleva,

(ii) $\forall \mathcal{U}(f(x_0))\ \exists \mathcal{U}^\pm(x_0)\ \forall x \in \mathcal{U}^\pm(x_0) \,:\, f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0))$,

(iv) $\forall \mathcal{U}(f(x_0))\ \exists \mathcal{U}^\pm(x_0) \,:\, f(\mathcal{U}^\pm(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0))$.

Platí jednoduchý vztah mezi spojitostí a jednostrannou spojitostí v bodě plynoucí z Věty 5.20 – její důkaz je snadným cvičením.

Věta 5.23. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Pak f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je spojitá v x_0 zprava i zleva.*

5.2 Základní vlastnosti limity

Věta 5.24. *Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. (sporem) Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 dvě limity L_1, L_2, $L_1 < L_2$. Pak podle Věty 2.68 existují okolí $\mathcal{U}(L_1)$ a $\mathcal{U}(L_2)$ taková, že $\mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2) = \emptyset$. Dále podle definice limity

- k $\mathcal{U}(L_1)$ existuje $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}(L_1)$ a současně
- k $\mathcal{U}(L_2)$ existuje $\mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}(L_2)$.

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tzn. $\mathcal{R}_\delta(x_0) = \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$. Pak pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}(L_1) \cap \mathcal{U}(L_2)$, což je ve sporu s tím, že průnik těchto okolí je prázdná množina. □

Věta 5.25 (limita a ohraničenost)**.**

(a) *Má-li f vlastní limitu v bodě x_0, pak existuje $\mathcal{R}(x_0)$, na kterém je f ohraničená.*

(b) *Má-li f nevlastní limitu ∞ v bodě x_0, pak na každém $\mathcal{R}(x_0)$ je f neohraničená shora a existuje $\mathcal{R}(x_0)$, na kterém je f ohraničená zdola.*

(c) *Má-li f nevlastní limitu $-\infty$ v bodě x_0, pak na každém $\mathcal{R}(x_0)$ je f neohraničená zdola a existuje $\mathcal{R}(x_0)$, na kterém je ohraničená shora.*

Důkaz. ad (a): Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Pak podle definice vlastní limity k $\varepsilon = 1$ existuje $\mathcal{R}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}(x_0)$ platí $|f(x) - L| < 1$, tzn.

$$|f(x)| \leq |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Tedy funkce f je ohraničená na $\mathcal{R}(x_0)$.
ad (b): Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Zvolme libovolně $\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$. Pak pro libovolné $h \in \mathbb{R}$ podle definice limity existuje $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ platí, že $f(x) > h$. Přitom pro toto $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ platí $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) \subset \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$, tzn. existuje $x \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ takové, že $f(x) > h$. To znamená, že $f(\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0))$ je neohraničená shora. Naopak, opět podle definice existuje $\mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ platí $f(x) > 0$. To ale znamená, že f je na $\mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ ohraničená zdola. $\square$

Věta 5.26. *Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotónní na nějakém $\mathcal{R}^-(x_0)$, ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$), pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$. Je-li f na $\mathcal{R}^-(x_0)$ ohraničená, pak je tato limita vlastní. Podrobněji:*

- *je-li funkce f na $\mathcal{R}^-(x_0)$ neklesající, pak*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{\mathcal{R}^-(x_0)} f,$$

- *je-li funkce f na $\mathcal{R}^-(x_0)$ nerostoucí, pak*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \inf_{\mathcal{R}^-(x_0)} f.$$

Důkaz. Předpokládejme, že f je na $\mathcal{R}^-(x_0)$ neklesající. Označme $G = \sup_{\mathcal{R}^-(x_0)} f$. Jsou dvě možnosti: (a) $G = \infty$ nebo (b) $G \in \mathbb{R}$.
ad (a): $G = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ libovolně. Podle definice suprema funkce pak existuje $x_1 \in \mathcal{R}^-(x_0)$ tak, že $f(x_1) > K$. Z monotónnosti funkce f na $\mathcal{R}^-(x_0)$ plyne, že

$$K < f(x_1) \leq f(x)$$

pro každé $x \in \mathcal{R}^-(x_0)$ takové, že $x > x_1$. Tím jsme dokázali, že $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty = \sup_{\mathcal{R}^-(x_0)} f$.
ad (b): $G \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože G je supremum funkce f na $\mathcal{R}^-(x_0)$, platí

- $f(x) \leq G$ pro všechna $x \in \mathcal{R}^-(x_0)$ a
- existuje $x_1 \in \mathcal{R}^-(x_0)$ tak, že $f(x_1) > G - \varepsilon$.

Z monotónnosti funkce f na $\mathcal{R}^-(x_0)$ a předchozích výroků plyne, že

$$G - \varepsilon < f(x_1) < f(x) \leq G < G + \varepsilon$$

pro všechna $x \in \mathcal{R}^-(x_0)$ taková, že $x > x_1$. Tím je důkaz hotov. □

Podobně lze dokázat existenci jednostranné limity zprava. Důkaz lze nechat čtenáři jako cvičení.

Věta 5.27. *Je-li funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monotónní na nějakém* $\mathcal{R}^+(x_0)$, *(*$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*), pak existuje* $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$. *Je-li* f *na* $\mathcal{R}^+(x_0)$ *ohraničená, pak je tato limita vlastní. Podrobněji:*

- *je-li funkce* f *na* $\mathcal{R}^+(x_0)$ *neklesající, pak*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf_{\mathcal{R}^+(x_0)} f,$$

- *je-li funkce* f *na* $\mathcal{R}^+(x_0)$ *nerostoucí, pak*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \sup_{\mathcal{R}^+(x_0)} f.$$

Věta 5.28 (o invarianci)**.** *Nechť pro funkce* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *existuje* $\mathcal{R}(x_0)$ *tak, že*

$$\forall x \in \mathcal{R}(x_0) : \; f(x) = g(x),$$

Pak existuje $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *právě tehdy, když existuje* $\lim_{x \to x_0} g(x)$. *Pokud limity existují, rovnají se.*

Důkaz. Nechť existuje $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$. Dokážeme, že pak také $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$. Zvolme libovolně okolí $\mathcal{U}(L)$. K němu podle definice limity funkce f existuje redukované okolí $\mathcal{R}_\delta(x_0) \subset \mathcal{R}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$f(x) \in \mathcal{U}(L).$$

Pak pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$g(x) = f(x) \in \mathcal{U}(L).$$

K $\mathcal{U}(L)$ jsme našli redukované okolí $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ takové, že $g(\mathcal{R}_\delta(x_0)) = f(\mathcal{R}_\delta(x_0)) \subset \mathcal{U}(L)$. □

Věta 5.29. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mají limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$. Pak:*

(a) Existuje-li $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že platí

$$f(x) \leq g(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathcal{R}(x_0),$$

pak $L_1 \leq L_2$.

(b) Je-li $L_1 < L_2$, pak existuje $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že

$$f(x) < g(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathcal{R}(x_0).$$

Důkaz. ad (a): (sporem) Nechť existuje $\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ a přitom $L_1 > L_2$. Pak podle Věty 2.68 existují (disjunktní) okolí $\mathcal{U}(L_1)$ a $\mathcal{U}(L_2)$ taková, že platí

$$\forall y_1 \in \mathcal{U}(L_1)\ \forall y_2 \in \mathcal{U}(L_2)\ :\ y_1 > y_2.$$

Podle předpokladu existence limit funkcí existují okolí $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ a $\mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ taková, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{U}(L_1) \quad \text{a} \quad \forall x \in \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)\ :\ g(x) \in \mathcal{U}(L_2).$$

Nechť $\tilde{x} \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$. Pak $f(\tilde{x}) > g(\tilde{x})$, což je ve sporu s předpokladem.
ad (b): Protože $L_1 < L_2$, pak podle Věty 2.68 existují (disjunktní) okolí $\mathcal{U}(L_1)$ a $\mathcal{U}(L_2)$ tak, že platí

$$\forall y_1 \in \mathcal{U}(L_1)\ \forall y_2 \in \mathcal{U}(L_2)\ :\ y_1 < y_2.$$

Podle definic L_1 a L_2, pak existují $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ a $\mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ tak, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{U}(L_1) \quad \text{a} \quad \forall x \in \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)\ :\ g(x) \in \mathcal{U}(L_2).$$

Položme $\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0) = \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$. Pak pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ platí $f(x) < g(x)$. □

Poznámka 5.30 Důležité je dodat, že platí-li ve Větě 5.29(a) ostré nerovnosti $f < g$ na $\mathcal{R}(x_0)$, nelze z toho usuzovat, že platí ostré nerovnosti pro limity v bodě x_0. Např. pro $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ platí, že $f(x) < g(x)$ pro každé $x \neq 0$, a přitom limity obou funkcí v bodě nula jsou stejné (rovny nule).

Věta 5.31. *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má kladnou limitu $L \in \mathbb{R}^*$ v bodě x_0. Pak existuje $\mathcal{R}(x_0)$ takové, že*

$$f(x) > 0 \quad \textit{pro všechna } x \in \mathcal{R}(x_0).$$

Je-li navíc tato limita vlastní, pak existuje $\mathcal{R}(x_0)$ takové, že

$$f(x) > \frac{L}{2} \quad \textit{pro všechna } x \in \mathcal{R}(x_0).$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne například z Věty 5.29(b). □

Věta 5.32 (o dvou limitách). *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce takové, že existuje $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že*

$$f(x) \leq g(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathcal{R}(x_0).$$

Pak platí implikace

- *je-li* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$,
- *je-li* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Důkaz. Dokažme pouze první implikaci, druhá se dokáže podobně. Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Dokažme $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Zvolme $h \in \mathbb{R}$ libovolně. Pak podle předpokladu existuje $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ tak, že

$$f(x) > h \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0).$$

Dále podle prvního předpokladu existuje $\mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$. Položme $\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0) = \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$. Pak pro každé $x \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ platí

$$g(x) \geq f(x) > h.$$

□

Věta 5.33 (o třech limitách). *Nechť $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že*

$$\exists \mathcal{R}(x_0)\ \forall x \in \mathcal{R}(x_0) : \ f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \in \mathbb{R}$. *Pak existuje* $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *a je rovna* L.

Důkaz. Dokažme $\lim_{x \to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle předpokladů existence limit existují $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ a $\mathcal{R}_{\delta_2}(x_0)$ tak, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) : \ L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

a

$$\forall x \in \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0) : \ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Podle prvního předpokladu existuje $\mathcal{R}_{\delta_3}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_3}(x_0)$. Položme

$$\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0) = \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_2}(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_3}(x_0).$$

Pak pro každé $x \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ platí

$$L - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < L + \varepsilon,$$

tzn. pro každé $x \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ platí $|g(x) - L| < \varepsilon$. □

Věta 5.34 (Heineova o limitě)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:*

(a) Jestliže existuje $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$ pak pro každou posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathcal{R}(x_0)$ splňující $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(b) Jestliže pro každou posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathcal{R}(x_0)$ splňující $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, pak existuje limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Důkaz. ad (a): Předpokládejme, že $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$ a uvažujeme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z nějakého $\mathcal{R}(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Dokážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$, tzn. že platí

$$\forall \mathcal{U}(L)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 \ :\ f(x_n) \in \mathcal{U}(L).$$

Zvolme $\mathcal{U}(L)$ libovolně. Z definice limity funkce plyne existence $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ takového, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0) \ :\ f(x) \in \mathcal{U}(L). \tag{5.1}$$

K $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ lze díky faktu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (definice limity posloupnosti) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$. Podle předpokladu ovšem pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$. Dosazením x_n za x do (5.1) dostáváme

$$f(x_n) \in \mathcal{U}(L)$$

pro všechna $n \geq n_0$.
ad (b): Předpokládejme, že pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z nějakého $\mathcal{R}(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Dokažme, že pak existuje $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Provedeme to ve dvou krocích:
Krok 1. Nejprve dokažme, že hodnota $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nezávisí na posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – sporem. Předpokládejme, že existují dvě posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, takové že $x_n, y_n \in \mathcal{R}(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ a přitom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L_1 \neq L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. Uvažujme novou posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ y_n & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Zřejmě pak $z_n \in \mathcal{R}(x_0)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$, ale $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dva hromadné body L_1 a L_2, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ neexistuje, což je spor s předpokladem. Dokázali jsme tedy, že existuje $L \in \mathbb{R}^*$ takové, že

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \ :\ (\forall n \in \mathbb{N} \ :\ x_n \in \mathcal{R}(x_0),\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L. \tag{5.2}$$

KROK 2. Dokažme $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, kde L je z kroku 1 – a to sporem. Předpokládejme, že platí (5.2) a zároveň L není limita funkce f v bodě x_0, tedy

$$\exists \mathcal{U}_\varepsilon(L)\ \forall \mathcal{R}_\delta(x_0)\ \exists x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)\ :\ f(x) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(L). \tag{5.3}$$

Výrok (5.3) tedy říká, že existuje $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ tak, že pro každou volbu $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ najdeme x splňující

$$x \in \mathcal{R}_\delta(x_0) \quad \wedge \quad f(x) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položíme $\delta = 1/n$ a z (5.3) dostáváme existenci takového $x = x_n$, že

$$x_n \in \mathcal{R}_{\frac{1}{n}}(x_0) \quad \wedge \quad f(x_n) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

Uvažujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vytvořenou z těchto bodů. S využitím Cvičení 3.51 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

a přitom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f(x_n) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(L)$. To znamená, že L nemůže být limita posloupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$, což je ve sporu s (5.2). □

Následující důsledek Heineovy věty nám často stačí:

Důsledek 5.35. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $L \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ právě tehdy, když pro každou posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ z $\mathcal{R}(x_0)$ splňujících $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

Poznámka 5.36 Heineova věta tedy říká, že naše definice limity funkce by šla zaměnit za následující: „Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu L, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ čísel z $\mathcal{R}(x_0)$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$." Nevýhodou je fakt, že pro takovou definici by byla nutná předchozí znalost pojmu limity posloupnosti. Výhodou může být lepší názornost – více odpovídá motivačnímu Příkladu 5.1 než Definice 5.3.

Ačkoliv Heineovu větu budeme používat zejména v důkazech, v následujícím příkladu si ilustrujme možné použití Heinovy věty i pro výpočet konkrétní limity.

Příklad 5.37 Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1.$$

Řešení. Použijme Heineovu větu, tzn. zvolme libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ nenulových reálných čísel takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dokažme, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{x_n} = 1.$$

Máme tedy dokázat, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ :\ 1 - \varepsilon < \mathrm{e}^{x_n} < 1 + \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Ze Cvičení 3.76 víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} = 1,$$

tzn. existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ platí $1 - \varepsilon < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$ platí $1 - \varepsilon < \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Položme $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak

$$1 - \varepsilon < \mathrm{e}^{-\frac{1}{n_3}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{n_3}} < 1 + \varepsilon.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, pak konečně existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$-\frac{1}{n_3} < x_n < \frac{1}{n_3}.$$

Vzhledem k tomu, že e^x je rostoucí, pak pro $n \geq n_0$ platí

$$1 - \varepsilon < \mathrm{e}^{-\frac{1}{n_3}} < \mathrm{e}^{x_n} < \mathrm{e}^{\frac{1}{n_3}} < 1 + \varepsilon.$$

○

Cvičení 5.38 Dokažte

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

[Návod: Důkaz veďte podobně jako v Příkladu 5.37, kde použijte Heinovu větu a výsledky Příkladu 3.34 (konkrétně limity posloupností $\{\mathrm{e}^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{(1/\mathrm{e})^n\}_{n=1}^{\infty}$).]

Heineovu větu také používáme k důkazu neexistence limity.

Příklad 5.39 Dokažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \sin x$$

neexistuje.

Řešení. Uvažujme dvě posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ definované jako

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ a přitom

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sin y_n = 0.$$

Podle Důsledku 5.35 nemůže $\lim_{x\to\infty} \sin x$ existovat. ○

Cvičení 5.40 Dokažte, že neexistují limity

$$\lim_{x\to 0+} \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0-} \sin \frac{1}{x}.$$

Věta 5.41 (Bolzanova–Cauchyova o existenci vlastní limity funkce)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje vlastní* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{R}_\delta(x_0)\ \forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}_\delta(x_0) : \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{5.4}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť existuje vlastní $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle definice limity existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ tak, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0) : \ |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy pro každé $x_1, x_2 \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - L + L - f(x_2)| \le |f(x_1) - L| + |L - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$): Nechť platí podmínka (5.4). K tomu abychom dokázali, že existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ podle Heineovy věty stačí dokázat, že pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z $\mathcal{R}(x_0)$ splňující $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z $\mathcal{R}(x_0)$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle (5.4) existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0) \subset \mathcal{R}(x_0)$ tak, že

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}_\delta(x_0) \,:\, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Z faktu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \ge n_0$ platí $x_n \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$. Protože navíc $x_n \in \mathcal{R}(x_0)$, pro $n \ge n_0$ dokonce platí, že $x_n \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$. Odtud plyne, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \ge n_0 \,:\, |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a podle Bolzanovy–Cauchyovy věty pro posloupnosti (Věta 3.98) je rovněž konvergentní. Tím je důkaz proveden. □

5.3 Metody výpočtu limity funkce

Příklad 5.8 měl ilustrovat, že dokázat spojitost resp. počítat limitu již jednoduché mocninné funkce může být celkem pracné. Jak dále uvidíme, bude stačit umět vypočítat limity nejjednodušších funkcí a pak použít příslušnou větu o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí a větu o limitě složené funkce.

Začněme výpočtem limit těch nejjednodušších funkcí.

Příklad 5.42 Dokažte, že pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ platí

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Řešení. ad (a): Máme dokázat pravdivost výroku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0,\ \exists \mathcal{R}(x_0)\ \forall x \in \mathcal{R}(x_0) \,:\, |c - c| < \varepsilon.$$

Nerovnost $|c - c| < \varepsilon$ je ale zřejmě pro kladné ε pravdivá, tedy je pravdivý celý výrok.
ad (b): Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Podle Definice 5.3 máme dokázat, že k libovolnému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí implikace

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x - x_0| < \varepsilon.$$

Uvažujme tedy libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zřejmě stačí položit $\delta = \varepsilon$.
Nechť $x_0 = \infty$. Podle Definice 5.12 máme ke každému $h \in \mathbb{R}$ najít $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí implikace

$$x > k \quad \Longrightarrow \quad x > h.$$

K danému h lze zvolit $k = h$. Podobně dokážeme rovnost pro $x_0 = -\infty$. ◯

Nyní představme větu a aritmetice limit funkcí, kterou při výpočtech budeme velmi často používat.

Věta 5.43. *Nechť* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}^*$. *Pak platí*

(i) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$,

(ii) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$,

(iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$,

je-li na pravé straně výraz definovaný v $\mathbb{R}^*$, *viz Poznámku 2.60(a).*

Důkaz. K dokázání této věty lze s výhodou použít větu o aritmetice limit posloupností (Věta 3.60) a Heineovu větu (stačí Důsledek 5.35). Ukažme si to třeba na limitě součinu, tzn. na rovnosti (iii). Zvolme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z okolí $\mathcal{R}(x_0)$ (takového, že $\mathcal{R}(x_0) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$), pro které platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Podle předpokladů $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ a Důsledku 5.35 platí, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = L_2.$$

Podle Věty 3.60 pak platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = L_1L_2,$$

a to pokud je výraz na pravé straně definován v Poznámce 2.60(a). Podle Důsledku 5.35 aplikované na funkci fg dostáváme, že $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1L_2$. □

Poznámka 5.44

(i) Tvrzení (i) z předchozí věty lze pro $a = 0$ obrátit, tzn. platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0.$$

(ii) Je-li $\lim_{x\to x_0} f_i(x) = L_i \in \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$, kde $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\lim_{x\to x_0} [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)] = c_1L_1 + c_2L_2 + \ldots + c_nL_n.$$

(iii) Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\lim_{x\to x_0} f^n(x) = L^n.$$

(iv) Je-li P polynom, pak $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. Je-li $R = \frac{P}{Q}$ racionální funkce, x_0 není kořen Q, pak $\lim_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$. Tedy, polynomy a racionální funkce jsou spojité ve všech bodech svých definičních oborů.

(v) Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a g je ohraničená na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$, pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Příklad 5.45 Vypočtěte

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

Řešení. Funkce, jejíž limitu máme spočítat, je racionální, ovšem číslo 2 nepatří do jejího definičního oboru. Vidíme, že jde opět o výraz 0/0. Protože jde o podíl dvou polynomů, pravidlo je opět jednoduché: Je-li číslo 2 k-násobným kořenem čitatele/jmenovatele, vytkneme z čitatele/jmenovatele výraz $(x-2)^k$. Jednou z možností je vyjádření čitatele/jmenovatele ve tvaru rozkladu na součin kořenových činitelů. Podle středoškolského vzorečku snadno spočítáme, že

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

a tedy

$$(x^2 - x - 2)^{20} = (x-2)^{20}(x+1)^{20}.$$

Co se jmenovatelem? Výraz $x^3 - 12x + 16$ je polynom třetího stupně a ne každý umí spočítat všechny kořeny tohoto polynomu. Naštěstí my nepotřebujeme spočítat všechny kořeny, ale pouze vyjádřit tento polynom ve tvaru součinu $(x-2)^m$ (kde $m \in \mathbb{N}$) a nějakého „zbytku“. Toho dosáhneme tak, že podělíme polynom $x^3 - 12x + 16$ polynomem $x - 2$. Pokud je 2 vícenásobným kořenem, dělíme vzniklý podíl ještě jednou a tak dále. K tomu je možno použít Hornerovo schéma – viz Poznámku 4.38. Proveďme to:

$$(x^3 - 12x + 16) : (x+2) = \ldots = x^2 + 2x - 8.$$

Ale číslo 2 je kořenem i tohoto podílu. Podělme ještě jednou:

$$(x^2 + 2x - 8) : (x+2) = \ldots = x + 4.$$

Dostáváme tak

$$x^3 - 12x + 16 = (x+2)^2(x+4).$$

Podívejme se zpět na naši limitu. Můžeme upravovat

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)^{20}(x+1)^{20}}{(x+2)^{20}(x+4)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10},$$

kde jsme v druhé rovnosti využili Větu 5.28 a v předposlední rovnosti využili spojitosti racionální funkce v každém bodě svého definičního oboru (tj. Poznámku 5.44(iv)). ◯

Příklad 5.46 Vypočtěte

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1},$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Opět máme vypočítat limitu racionální funkce v bodě, který neleží v jejím definičním oboru, přitom dostáváme neurčitý výraz 0/0. Postup je stejný jako vždy, je třeba si z čitatele a jmenovatele vytknout $(x-1)^k$ (kde $k \in \mathbb{N}$ je násobnost 1 jakožto kořene) a pak pokrátit. Jak to provést zde? Možností je podělit čitatele/jmenovatele polynomem $x - 1$, ale vzhledem k obecnosti zadání to někomu může činit problém. Jednodušší je použít středoškolský vzoreček ze Cvičení 1.69. Platí tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1}\end{aligned}$$

Uvědomme si nyní, že čísla m a n jsou sice libovolná ale během našeho výpočtu pevná čísla – mění se pouze x (přibližuje se k 1). Dostáváme tak racionální funkci jejímž kořenem není 1. Platí tedy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}=\frac{1+\ldots+1}{1+\ldots+1}=\frac{m}{n},$$

kde v předposledním výrazu bylo v čitateli právě m jedniček a ve jmenovateli n jedniček (po sečtení dostáváme čísla m a n). Pokud máte problém s pochopením, zkuste si spočítat tento příklad pro konkrétní hodnoty parametrů m, n, např. $m = 2$ a $n = 3$, tzn. vypočtěte stejným postupem limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}.$$

○

Stejně jako u posloupností, podívejme se na neurčitý výraz 1/0.

Věta 5.47. *Nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. *Pokud navíc*

(a) *existuje* $\mathcal{R}(x_0)$ *takové, že* $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathcal{R}(x_0)$, *pak*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty,$$

(b) *existuje* $\mathcal{R}(x_0)$ *takové, že* $f(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \mathcal{R}(x_0)$, *pak*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty,$$

(c) *existuje* $\mathcal{R}(x_0)$ *takové, že* $f(x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in \mathcal{R}(x_0)$, *pak*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{|f(x)|}=\infty.$$

Důkaz. Důkazy se provedou podobným stylem jako analogické věty pro limity posloupností. □

Může se také hodit následující věta, ve které dokonce u jedné z funkcí vůbec nevyžadujeme existenci limity – opět si všimněte analogií s limitou posloupnosti.

Věta 5.48. *Nechť* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou funkce takové, že* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ *takové, že* g *je na* $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ *ohraničená. Pak*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože g je ohraničená na $\mathcal{R}_\delta(x_0)$, existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí $g(x) < K$. Z předpokladu nulovosti limity funkce f v x_0 plyne, že existuje $\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$ platí

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Položme $\mathcal{R}_{\delta_1}(x_0) = \mathcal{R}_\delta(x_0) \cap \mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$. Pak pro všechna $x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(x_0)$ platí

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

$\square$

Věta 5.49 (o limitě složené funkce)**.** *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1, \quad \lim_{y \to L_1} g(y) = L_2.$$

Jestliže navíc

(I) existuje $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}(x_0)$ platí $f(x) \neq L_1$, nebo

(II) g je v L_1 spojitá (tedy $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ a $L_2 = g(L_1)$),

pak

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = L_2.$$

Důkaz. Máme tedy dokázat, že

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon(L_2)\ \exists \mathcal{R}_\delta(x_0)\ \forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)\ :\ g(f(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L_2).$$

Nechť platí (I). Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon(L_2)$ libovolně. Pak z předpokladu na funkci g plyne, že existuje $\mathcal{R}_\eta(L_1) \subset \mathcal{D}(g)$ takové, že

$$\forall y \in \mathcal{R}_\eta(L_1)\ :\ g(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L_2).$$

Podle předpokladu $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$ tak, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{U}_\eta(L_1),$$

přitom $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ lze volit tak malé, že $\mathcal{R}_\delta(x_0) \subset \mathcal{R}(x_0)$, kde $\mathcal{R}(x_0)$ je z podmínky (I). Pak ale právě z (I) vyplývá, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{R}_\eta(L_1).$$

Dohromady dostáváme, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)\ :\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L_2).$$

Tím je současně dokázáno, že funkce $f \circ g$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$ a $\lim_{x \to x_0}(g \circ f)(x) = L_2$.
Nechť platí (II). Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon(L_2)$ libovolně. Podle předpokladu (II) existuje $\mathcal{U}_\eta(L_1)$ tak, že

$$\forall y \in \mathcal{U}_\eta(L_1)\ :\ g(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L_2).$$

Z definice $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, pak existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ takové, že

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)\ :\ f(x) \in \mathcal{U}_\eta(L_1).$$

Dohromady dostáváme, že

$$\forall x \in \mathcal{R}(x_0)\ :\ g \circ f(x) = g(f(x)) \in \mathcal{U}(L_2).$$

Tím je opět dokázáno, že funkce $f \circ g$ je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$ a $\lim_{x \to x_0}(g \circ f)(x) = L_2$. $\square$

Poznámka 5.50 Všechny zmíněné věty platí i pro jednostranné limity (za lehce změněných předpokladů – např. jedná-li se o pravostrannou limitu v x_0, nahradí se v předpokladech okolí $\mathcal{R}(x_0)$ okolím $\mathcal{R}^+(x_0)$).

Příklad 5.51 Vypočtěte
$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

Řešení. Vidíme, že zde je opět neurčitý výraz 0/0. Bohužel, nemáme racionální funkci, jejíž limitu bychom nalezli zkrácením příslušných kořenových činitelů. Ale výpočet můžeme na tento případ převést. Je potřeba zbavit se těch odmocnin.

Podívejme se nejprve na čitatel. Platí
$$(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)=9+2x-25=2(x-8),$$
kde jsme využili středoškolský vzorec ze Cvičení 1.69 pro $n=1$. Můžeme psát
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}&=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{9+2x}+5}{\sqrt{9+2x}+5}=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{9+2x}+5}\\&=2\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{9+2x}+5}=2\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt{9+2x}+5}\\&=\frac{1}{5}\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.\end{aligned}$$

Podrobně si odůvodněme platnost předposlení rovnosti, která platí díky Větě 5.43. Její použití je oprávněno pouze v případě, že
$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt{9+2x}+5}$$
není neurčitý výraz. Opravdu není? Vždyť v okamžiku použití této věty jsme neznali hodnotu první limity. To je sice pravda, nicméně znali jsme hodnotu druhé limity, což je 1/10. Již víme, že jediný neurčitý výraz pro násobení je typu $0\cdot\infty$. Odtud plyne, že o neurčitý výraz nemůže jít.

Podobně si poradíme s jmenovatelem, kde použijeme vzorec ze Cvičení 1.69 pro $n=2$. Platí totiž
$$(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=x-8.$$

Tedy opět rozšíříme vhodným výrazem a dostaneme
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}&=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}\\&=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=12.\end{aligned}$$

Výsledek je tedy 12/5.

Při tak rozvláčném výkladu se může snadno ztratit hlavní myšlenka. Ukažme si proto rychlejší verzi našich úprav (zbavíme se odmocnin v čitateli i jmenovateli současně):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{9+2x}+5}{\sqrt{9+2x}+5}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\\ &= \lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}\\ &= \lim_{x\to 8}\frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{2\cdot 12}{10} = \frac{12}{5}.\end{aligned}$$

○

Příklad 5.52 Vypočtěte

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right).$$

Řešení. Jde vlastně o dva příklady. Nejprve vypočteme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right),$$

kde máme neurčitý výraz $\infty-\infty$. Kdybychom místo x psali n, mohli jsme zadání pochopit jako výpočet limity posloupnosti. Použijeme postup, který zabere jak na limitu funkce tak na limitu posloupnosti. Jak se zbavit neurčitého výrazu? Třeba tak, že se nějak zbavíme té odmocniny. Použitím vzorce ze Cvičení 1.69 pro $n=1$ máme

$$\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right) = x^2+x-x^2 = x.$$

Všimněme si dvou pozitivních věcí: výrazy $\sqrt{x^2+x}+x$ ani x nejsou pro $x\to\infty$ neurčité, a platí

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) = \infty = \lim_{x\to\infty} x.$$

Proveďme vhodné rozšíření našeho výrazu:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$

Zde zase sice máme neurčitý výraz typu ∞/∞, ale s tím si už umíme poradit (viz příklady s posloupnostmi): Vytkneme z čitatele a jmenovatele člen, který nejrychleji roste a pak porovnáme tyto členy. Platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Nyní se podívejme na druhý příklad. Máme spočítat

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right).$$

Zde trochu musíme zbystřit, protože $x\to-\infty$ a vyskytuje se ve výrazu pod sudou odmocnina. Je vůbec taková limita dobře definovaná? Snadno vidíme, že

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+x) = \lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}\right) = \infty\cdot(1+0) = \infty,$$

tzn. výraz pod odmocninou je pro dostatečně malá x kladné číslo, z čehož plyne, že funkce je definovaná na nějakém $\mathcal{R}(-\infty)$. Odmocnina tedy potíž nedělá, navíc jsme také určili, že

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} = \infty$$

(to vlastně plyne z Věty 5.32). Protože pak

$$\lim_{x\to-\infty} -x = \infty,$$

vidíme, že nyní vůbec nebojujeme s neurčitým výrazem, ale přímo platí

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \infty + \infty = \infty. \qquad \bigcirc$$

Poznámka 5.53 Z Příkladu 5.37, výsledků Cvičení 5.38 a Věty 5.49 plyne, že pokud $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^*$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak platí

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} f(x)},$$

přitom pokládáme $\mathrm{e}^{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ a $\mathrm{e}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Prakticky si to můžeme pamatovat jako tak, že s limitou lze jít do argumentu exponenciální funkce.

Příklad 5.54 Dokažte

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R} \ &: \quad \lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0, \\ \forall x_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{tg}) \ &: \quad \lim_{x\to x_0} \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, x_0, \\ \forall x_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{cotg}) \ &: \quad \lim_{x\to x_0} \mathrm{cotg}\, x = \mathrm{cotg}\, x_0. \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve dokažme tvrzení pro funkci sinus. Ukažme nejprve, že pro všechna

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ |\sin x| \le |x|. \tag{5.5}$$

Důkaz provedeme částečně geometricky. Nechť $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Z Obrázku 5.6 snadno nahlédneme, že

$$0 < \sin x = |BC| < |AC| < x.$$

Protože funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x$ jsou liché funkce, pak pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ platí $0 > \sin x > x$. Dohromady pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dostáváme $|\sin x| \le |x|$. Je-li dále $|x| \ge \frac{\pi}{2}$, pak

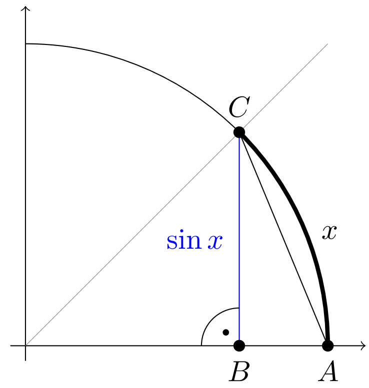
$$|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|.$$

Tím jsme tedy dokázali nerovnost (5.5). Konečně dokažme, že $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, tzn.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \delta \ : \ |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$ libovolně. Pak stačí zvolit $\delta = \varepsilon$, protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta$ platí s využitím nerovnosti (5.5), že

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \le 2 \left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$



Obrázek 5.6: Nerovnost $\sin x < x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

S pomocí vzorce $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, věty o limitě složené funkce a předcházející části dostáváme

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \lim_{x \to x_0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right).$$

S použitím Věty 5.43(iv) dostáváme zbytek rovností. ○

Příklad 5.55 Dokažte, že platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Funkci sin jsme „definovali“ geometricky, i zde budou některá fakta plynout z geometrické úvahy. Nejprve ukažme, že pro všechna $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{R}^{+}_{\frac{\pi}{2}}(0)$ platí nerovnosti

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{5.6}$$

První nerovnost již víme z řešení Příkladu 5.54. Dokažme nerovnost druhou. V Obrázku 5.7 vidíme, že trojúhelníky $\triangle OBC$ a $\triangle OAD$ jsou podobné, tedy

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}, \quad \text{tzn.}\ \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overline{AD}}{1},$$

čímž dostáváme $\overline{AD} = \operatorname{tg} x$. Protože obsah kruhové výseče určené body O, A a C je menší než obsah $\triangle OAD$, platí

$$\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad \text{tzn. } x < \operatorname{tg} x.$$

Z nerovnosti (5.6) podělením kladným výrazem $\sin x$ dostáváme

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

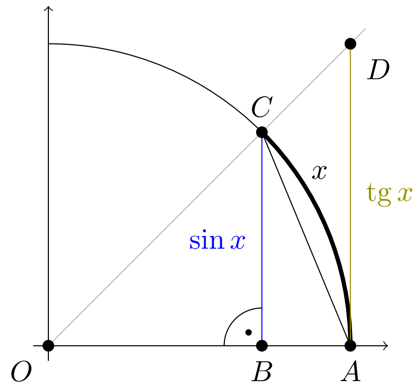
Tedy konečně

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

pro všechna $x \in \mathcal{R}^{+}_{\frac{\pi}{2}}(0)$. Z věty o třech limitách pak dostáváme, že

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ze sudosti této funkce dostáváme, že i limita zleva je rovna 1. ○



Obrázek 5.7: K řešení Příkladu 5.55.

Příklad 5.56 Dokažte, že
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$$

Řešení. Dokažme nejprve, že
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$$
Uvažujme $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Označme
$$n=\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor,$$
tzn. $n\le\frac{1}{x}<n+1$, $n\in\mathbb{N}$. Protože $x<\frac{1}{2}$, platí, že $n\ge 2$. Pak také
$$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}. \tag{5.7}$$
Z této nerovnosti a Poznámky 3.103(a) plynou nerovnosti
$$1+\frac{1}{n+1}<\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}<\mathrm{e}^x\le\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n-1}.$$
Přitom z (5.7) také dostáváme, že
$$\frac{x}{x+1}\le\frac{1}{n+1}\quad\text{a}\quad 1+\frac{1}{n-1}<\frac{x}{1-2x}.$$
Dohromady dostáváme
$$\frac{x}{x+1}<\mathrm{e}^x<\frac{x}{1-2x}$$
pro všechna $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Z věty o třech limitách dostáváme požadovanou identitu pro limitu zprava. S použitím věty o limitě složené funkce dostáváme
$$\lim_{x\to 0-}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{y\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{-y}-1}{-y}=-\lim_{y\to 0+}\frac{\frac{1-\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y}}{y}=\lim_{y\to 0+}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}\cdot\mathrm{e}^y=1.$$

○

Příklad 5.57 Dokažte, že
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Řešení. Provedeme substituci
$$y=\ln(1+x),\quad \text{tzn. } x=\mathrm{e}^y-1,$$
přitom když $x\to 0$, pak $y\to 0$. Platí pak
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{e}^y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}}=1,$$
kde poslední rovnost plynula z Příkladu 5.56 a Věty 5.43. Takto budeme běžně postupovat při používání věty o limitě složené funkce (Věta 5.49). Je ale vhodné zde přesně popsat použití této věty. Věta 5.49 byla použita pro
$$g(y)=\frac{y}{\mathrm{e}^y-1},\quad f(x)=\ln(1+x),\quad L_1=0,\quad L_2=0.$$
Ověřte splnění předpokladů této věty pro tyto konkrétní funkce a limity. Třeba fakt, že $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ plyne ze spojitosti funkce ln (viz dále Poznámku 5.81). ◯

Věta 5.49 dohromady s Příklady 5.55, 5.56 a 5.57 nám dává velmi užitečné tvrzení:

Důsledek 5.58. *Nechť $x_0\in\mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ a existuje $\mathcal{R}(x_0)$ takové, že*
$$\forall x\in\mathcal{R}(x_0)\ :\ f(x)\neq 0.$$
Pak platí
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-1}{f(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1.$$

Příklad 5.59 Vypočtěte
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}.$$

Řešení. Nejprve určíme o jaký jde výraz. Podle Poznámky 5.44(iii) platí
$$\lim_{x\to 0}x^2=0,$$
tzn. podle Věty 5.49 také
$$\lim_{x\to 0}\sin x^2=\sin 0=0,$$
tedy vidíme, že jde o neurčitý výraz 0/0. Pokrátit nijak nemůžeme. Pomoci nám může Důsledek 5.58, podle kterého platí
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1.$$
Můžeme pak psát
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}x,$$

kde jsme v první rovnosti rozšířili výraz výrazem x/x. To bylo možné díky Větě 5.28. Nyní již můžeme použít Větu 5.43, protože již nejde o neurčitý výraz. Platí totiž

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} x = 1 \cdot 0 = 0.$$

○

Příklad 5.60 Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

Řešení. U příkladů s goniometrickými funkcemi je dobré si pamatovat goniometrické vzorce. Podíváme-li se na zadání, jde opět o neurčitý výraz 0/0. Je potřeba něco zkrátit, nebo vhodně použít vzoreček z Důsledku 5.58. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x},$$

kde jsme pokrátili výrazem $\sin x$ a upravili. Znovu prozkoumejme, o jaký jde výraz. Opět jde o neurčitý výraz 0/0. Každopádně je jednodušší. To, že je výraz neurčitý, je způsobeno celým čitatelem a ve jmenovateli pouze výrazem $\sin^2 x$. Výraz $\cos x$ jde pro $x \to 0$ k číslu 1. Můžeme psát

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}.$$

Tím jsme provedli další zjednodušení. V předposlední rovnosti jsme použili Větu 5.43, ovšem někdo by mohl oprávněně namítnout, že jsme neověřili platnost předpokladů zmíněné věty. Sice víme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

ale hodnotu limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

ještě neznáme! Každopádně je jasné, že za předpokladu, že druhá limita existuje, nemůže se jednat o neurčitý výraz, tedy použití věty je korektní. Existenci druhé limity bude ověřena následným výpočtem. Pokračujme dále. Rádi bychom něco pokrátili. Můžeme si vzpomenout na vzoreček, kterému někteří říkají „goniometrická jednička“ a upravit ho:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x).$$

Můžeme dále upravovat

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Zde již lze jen konstatovat, že nejde o neurčitý výraz a s použitím faktu $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ a Věty 5.43 dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

○

Příklad 5.61 Vypočtěte
$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$$

Řešení. Rozmysleme si nejprve, o jaký jde výraz. Zřejmě
$$\lim_{x\to 1}(1-x)=0.$$

Jde-li x k 1, pak výraz $\pi x/2$ jde k $\pi/2$. Víme ale, že
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x$$

neexistuje, protože
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg}x=\infty\neq-\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\operatorname{tg}x.$$

S trochou nepřesnosti můžeme výraz v zadání příkladu prohlásit za neurčitý výraz $0\cdot(\pm\infty)$. Funkce tangens sice limitu nemá, ale limita celé funkce existovat může. Zkusme tedy nějaké úpravy. Podle definice funkce tangens platí
$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Vidíme, že výraz $\sin(\frac{\pi x}{2})\to 1$ pro $x\to 1$. Proto nezávisle na tom, jakou hodnotu má limita zbytku, můžeme psát
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\sin\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$
což je neurčitý výraz 0/0. Vidíme, že v čitateli je polynom a ve jmenovateli goniometrická funkce – to by nás mohlo vést k tipu, že bychom mohli použít vzoreček z Důsledku 5.58. Je potřeba rozmyslet, jak stávající výraz upravit do požadovaného tvaru. Vidíme, že argument cos se přibližuje k $\pi/2$. My potřebujeme naopak aby se tam vyskytoval sin jehož argument půjde k nule. Zde se hodí znát nějaký vzoreček pro goniometrické funkce. Neexistuje jediná cesta. Zkusíme použít tento
$$\forall a,b\in\mathbb{R}:\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

Naše $a+b$ je rovno $\pi x/2$. Za a a b dosadíme tak, aby jeden z vzniklých „sinů" měl argument jdoucí k nule. Např. $a=\pi(x-1)/2$, takže pak $b=\pi/2$. Potom platí
$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi x}{2}&=\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi(x-1)}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi(x-1)}{2}\sin\frac{\pi}{2}\\&=-\sin\frac{\pi(x-1)}{2}.\end{aligned}$$

Můžeme pokračovat ve výpočtu limity:
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{-\sin\frac{\pi(x-1)}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin\frac{\pi(x-1)}{2}}.$$

Protože
$$\lim_{x\to 1}\frac{\pi(x-1)}{2}=0,$$

pak podle Důsledku 5.58 platí

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin \frac{\pi(x-1)}{2}} = 1.$$

Hodnotu této limity použijeme v našem výpočtu. Výraz vhodně rozšíříme a dostáváme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sin \frac{\pi(x-1)}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin \frac{\pi(x-1)}{2}} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

○

Příklad 5.62 Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln(1+\sqrt{x^3+x^2})}.$$

Řešení. Nejprve vypočtěme limitu zprava. Opět jde o neurčitý výraz – typu $0/0$. Vidíme, že v čitateli i jmenovali se vyskytuje výraz ve formě $\ln(1+f(x))$ a přitom $f(x)\to 0$. To by nás mělo navést k použití Důsledku 5.58. Rozšíříme zlomek vhodnými výrazy:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln(1+\sqrt{x^3+x^2})} \cdot \frac{x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x} \cdot \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^3+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{x\mathrm{e}^x} \cdot \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\ln(1+\sqrt{x^3+x^2})} \cdot \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^3+x^2}}$$

Použitím Důsledku 5.58 se zbavíme logaritmu a dostáváme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^3+x^2}}.$$

Vidíme, že jde opět o neurčitý výraz $0/0$, přitom $\mathrm{e}^x \to 1$ když $x\to 0+$, tzn. můžeme ještě upravit

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \mathrm{e}^0 \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}.$$

Tuto úpravu jsme nutně dělat nemuseli, ale je dobrým zvykem udržovat počítaný výraz co možná nejjednodušší a tedy nejpřehlednější. Co teď? Potřebujeme něco s něčím pokrátit. Výraz ze jmenovatele lze upravit takto

$$\sqrt{x^3+x^2} = \sqrt{x^2(x+1)} = |x|\sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1},$$

kde je třeba upozornit, že $|x| = x$ protože $x\to 0+$, tzn. x uvažujeme kladné. Platí tedy

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1.$$

Podívejme se na limitu zleva. Jako u limity zprava jde o neurčitý výraz typu $0/0$. Výpočet bude identický jako pro pravostrannou limitu s jediným rozdílem a to, že $|x| = -x$, protože $x\to 0-$, tzn. x uvažujeme záporné. Výsledek bude nyní -1 (ověřte). ○

Poznámka 5.63 Zatím jsme se nezmínili o limitách funkcí ve tvaru

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)},$$

kde předpokládáme, že existuje $\mathcal{R}(x_0)$ takové, na kterém jsou funkce f a g definované a $f(x) > 0$ pro všechna $x\in\mathcal{R}(x_0)$. S využitím vzorečku

$$a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$$

a Poznámky 5.53 můžeme snadno problém převést na výpočet limity

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x).$$

Protože

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0 \ \text{ pro } x_0 \in (0,\infty),$$

(první dvě limity se dají ověřit přímo z definice, třetí vyplývá ze spojitosti funkce ln – což teprve uvidíme v Poznámce 5.81) snadno pak určíme hodnotu této limity. Přitom neurčité výrazy jsou právě tyto (ověřte!):

$$1^{\pm\infty}, \quad 0^0 \quad \text{a} \quad \infty^0.$$

Příklad 5.64 Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} (x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení. Jde o limitu funkce ve tvaru mocniny, přitom základ jde k 1 a exponent nemá limitu, i když jeho absolutní hodnota jde k ∞. Postupujme stejně jako v Poznámce 5.63. Podle ní můžeme upravit

$$\lim_{x\to 0} (x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x)},$$

kde poslední rovnost plyne z Poznámky 5.53. Stačí tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x)$$

a pak dosadit zpět. Zde jde ovšem zcela jasně o neurčitý výraz typu $0/0$. Vidíme, že čitatel jde k nule, protože argument logaritmu jde k jedničce. To by nás opět mohlo navést k aplikaci vzorečku z Důsledku 5.58. Potřebujeme ale v čitateli výraz $\ln(1+\ldots)$. Můžeme psát

$$\ln(x+\mathrm{e}^x) = \ln(1+x+\mathrm{e}^x-1),$$

přitom $x+\mathrm{e}^x-1 \to 0$ pro $x\to 0$. Odtud plyne

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x}\cdot\frac{x+\mathrm{e}^x-1}{x+\mathrm{e}^x-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+\mathrm{e}^x-1)}{x+\mathrm{e}^x-1}\cdot\frac{x+\mathrm{e}^x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+\mathrm{e}^x-1}{x}.\end{aligned}$$

Opět sice máme neurčitý výraz typu $0/0$, ale zbavili jsme se logaritmu. V čitateli platí $x\to 0$ a $\mathrm{e}^x-1\to 0$, tzn. mohla by nás napadnout vzhledem k limitě z Příkladu 5.56 úprava

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\mathrm{e}^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 2.$$

Výsledek tedy je e^2. ○

Příklad 5.65 Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0}\frac{u^x-1}{x},$$

kde $u\in\mathbb{R}$, $u>0$.

Řešení. Zadání by nám mohlo připomínat limitu z Příkladu 5.56 a to nejen vzhledem, ale i tím, že jde o stejný neurčitý výraz, tzn. $0/0$. Pokusme se náš příklad převést na použití výsledku z Příkladu 5.56, resp. jeho zobecnění v Důsledku 5.58. S pomocí vzorce $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$ máme

$$u^x = \mathrm{e}^{x \ln u}.$$

Platí $x \ln u \to 0$ pro $x \to 0$, takže by se jevilo možné použít již zmíněnou limitu z Důsledku 5.58. To ale možné není, protože není splněn předpoklad tohoto důsledku pro funkci $f(x) = x \ln u$. Totiž pro hodnotu $u = 1$ je $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Rozlišme proto dva případy:

(a) Nechť $u = 1$. Podíváme-li se na zadání příkladu, vidíme, že výsledek získáme okamžitě:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0 = \ln 1.$$

(b) Nechť $u > 0$, $u \neq 1$. Pak podle Důsledku 5.58 můžeme psát

$$\lim_{x \to 0} \frac{u^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x \ln u} - 1}{x} \cdot \frac{\ln u}{\ln u} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x \ln u} - 1}{x \ln u} \cdot \ln u = \ln u.$$

Pro oba případy můžeme jednotně napsat výsledek

$$\lim_{x \to 0} \frac{u^x - 1}{x} = \ln u.$$

○

Příklad 5.66 Vypočtěte

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{u^x + v^x + w^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}},$$

kde $u, v, w \in (0, \infty)$.

Řešení. Jde o výraz typu $1^{\pm\infty}$. Inspirováni řešením Příkladu 5.64 upravíme

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{u^x + v^x + w^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{u^x + v^x + w^x}{3}},$$

tedy stačí určit limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{u^x + v^x + w^x}{3}}{x}.$$

Jde o výraz typu $0/0$ a opět vidíme, že argument logaritmu jde k jedničce – použijeme vzoreček z Důsledku 5.58. Platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{u^x + v^x + w^x}{3}}{x} \cdot \frac{\frac{u^x + v^x + w^x}{3} - 1}{\frac{u^x + v^x + w^x}{3} - 1} &= \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{u^x + v^x + w^x}{3} - 1\right)}{\frac{u^x + v^x + w^x}{3} - 1} \cdot \frac{\frac{u^x + v^x + w^x}{3} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{u^x + v^x + w^x - 3}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{u^x + v^x + w^x - 3}{x}. \end{aligned}$$

Poslední výraz je opět $0/0$. A to proto, že $u^x + v^x + w^x \to 3$. Mohla by nás napadnout tato úprava

$$u^x + v^x + w^x - 3 = u^x - 1 + v^x - 1 + w^x - 1,$$

tzn. náš výpočet by pokračovat takto

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{u^x+v^x+w^x-3}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{u^x-1}{x}+\frac{v^x-1}{x}+\frac{w^x-1}{x}\right).$$

Vzhledem k výsledku Příkladu 5.65 je náš výsledek roven

$$\frac{1}{3}(\ln u+\ln v+\ln w)=\frac{1}{3}\ln uvw.$$

○

5.4 Základní vlastnosti funkce spojité v bodě

Podívejme se nyní co lze říct o spojitosti. V této sekci budeme využívat poznatků z předchozí části.

Věta 5.67 (spojitost v bodě a ohraničenost)**.** *Je-li funkce* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *spojitá v bodě* x_0*, pak existuje* $\mathcal{U}(x_0)$ *tak, že* f *je na* $\mathcal{U}(x_0)$ *ohraničená.*

Důkaz. Ze spojitosti funkce plyne, že existuje vlastní limita funkce f v x_0. Pak podle Věty 5.25(a) existuje $\mathcal{R}_\varepsilon(x_0)$, na kterém je f ohraničená. Zřejmě je f ohraničená i na $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$. □

Věta 5.68. *Nechť* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *je spojitá v bodě* $x_0\in\mathbb{R}$*. Jestliže* $f(x_0)>0$*, pak existuje* $\mathcal{U}(x_0)$ *takové, že*

$$\forall x\in\mathcal{U}(x_0)\ :\ f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

Podobně, je-li $f(x_0)<0$*, pak existuje* $\mathcal{U}(x_0)$ *takové, že*

$$\forall x\in\mathcal{U}(x_0)\ :\ f(x)\leq\frac{f(x_0)}{2}<0.$$

Důkaz. Protože $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$, $f(x_0)>0$, pak podle Věty 5.31 existuje $\mathcal{R}_\varepsilon(x_0)$ tak, že pro všechna $x\in\mathcal{R}_\varepsilon(x_0)$ platí

$$f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

Zřejmě tyto nerovnosti platí i pro všechna $x\in\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$. □

Cvičení 5.69 Dokažte obecnější tvrzení: Jsou-li $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spojité v x_0 a $f(x_0)<g(x_0)$, pak existuje $\mathcal{U}(x_0)$ takové, že pro všechna $x\in\mathcal{U}(x_0)$ platí $f(x)<g(x)$.

Věta 5.70 (Heineova o spojitosti)**.** *Nechť* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *je definovaná na nějakém* $\mathcal{U}(x_0)$*. Funkce* f *je v bodě* x_0 *spojitá právě tehdy, když pro každou posloupnost čísel* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *z* $\mathcal{U}(x_0)$ *takovou, že* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$*.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť f je spojitá v x_0 a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Zvolme libovolně $\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$. K němu podle spojitosti f v x_0 existuje $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ tak, že $f(\mathcal{U}_\delta(x_0)) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$. K tomuto $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \qquad x_n \in \mathcal{U}_\delta(x_0).$$

Tedy pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$f(x_n) \in f(\mathcal{U}_\delta(x_0)) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Dokázali jsme tedy první implikaci.
($\Leftarrow$): (sporem) Nechť $x_n \to x_0$ implikuje $f(x_n) \to f(x_0)$ pro $n \to \infty$ a předpokládejme, že f není v x_0 spojitá, tzn.

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

To znamená, že k jakkoliv malému $\delta > 0$ jsme schopni najít takové x, že $|x - x_0| < \delta$ a $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Volme postupně $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ a dostáváme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n \in \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x_0)\ \wedge\ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Podle Cvičení 3.51 pak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ a zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, což je žádaný spor. □

Poznámka 5.71

(a) Z Věty 5.70 mimo jiné plyne, že funkce f je v bodě x_0 nespojitá právě tehdy, když existuje posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ a přitom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$ (nebo tato limita vůbec neexistuje).

(b) Dá se vyslovit a dokázat stejně i verze Věty 5.70 pro spojitost zprava/zleva. Jen je potřeba vyměnit okolí bodu x_0 za pravé/levé okolí tohoto bodu.

Věta 5.72. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité v x_0. Pak jsou v x_0 spojité funkce*

$$|f|,\ f + g,\ f - g,\ f \cdot g.$$

Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je spojitá v x_0 i funkce $\frac{f}{g}$.

Důkaz. Tato věta je vlastně přímým důsledkem Věty 5.43. □

Příklad 5.73

(1) Polynom je funkce spojitá v každém bodě. Racionální funkce $R = \frac{P}{Q}$ je spojitá v každém bodě svého definičního oboru (tzn. v každém bodě, který není kořenem polynomu Q).

(2) Funkce sin, cos, tg, cotg jsou spojité funkce ve všech bodech svých definičních oborů.

(3) Funkce mocninné, exponenciální i logaritmické jsou spojité ve všech bodech svých definičních oborů.

Věta 5.74. *Nechť f je spojitá v x_0, g je spojitá v $f(x_0)$. Pak $g \circ f$ je spojitá v x_0.*

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 5.49 pro $L_1 = f(x_0)$, přičemž je splněna podmínka (II) této věty. Pak
$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)),$$
tedy $g \circ f$ je v x_0 spojitá. □

5.5 Klasifikace bodů nespojitosti

Jak už víme, funkce je v daném bodě spojitá, pokud má v tomto bodě vlastní limitu, která je navíc rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Pokud tomu tak není, říkáme, že funkce je nespojitá – přitom rozlišujeme tři typy nespojitosti.

Definice 5.75 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě x_0

(i) *odstranitelnou nespojitost*, jestliže existuje vlastní $\lim_{x \to x_0} f(x)$ a přitom buď

  (a) $x_0 \notin \mathcal{D}(f)$, nebo

  (b) $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a zároveň $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

(ii) *nespojitost prvního druhu (typu „skok“)*, jestliže existují vlastní ale různé limity $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0+} f(x)$,

(iii) *nespojitost druhého druhu*, jestliže jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 neexistuje nebo je nevlastní.

Příklad 5.76 (a) Funkce
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
je spojitá v každém bodě až na 0, kde není definovaná. Přitom v bodě 0 má odstranitelnou nespojitost, protože
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}.$$

(b) Funkce
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
je opět spojitá ve všech bodech, až na 0. Je sice v bodě 0 definovaná, ale platí
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \neq 1 = g(0).$$
Funkce g má v bodě 0 také odstranitelnou nespojitost.

(c) Funkce sgn je spojitá ve všech bodech až na bod 0, protože neexistuje limita v bodě 0. Existují ale obě jednostranné limity, které jsou vlastní:
$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1.$$
Proto má funkce sgn v bodě 0 nespojitost prvního druhu.

(d) Funkce

$$k(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

je opět spojitá v každém bodě, až na bod 0. Dokonce neexistuje ani jedna z jednostranných limit funkce k v bodě 0 (proč?). Funkce k má tedy v bodě 0 nespojitost druhého druhu.

(e) Funkce cotg je spojitá ve všech bodech až na body $x_0 = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Protože

$$\lim_{x \to k\pi+} \operatorname{cotg} x = \infty, \qquad \lim_{x \to k\pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty,$$

funkce má v těchto bodech nespojitost druhého druhu.

5.6 Funkce spojité na intervalu

Definice 5.77 Řekneme, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá na intervalu* $I \subset \mathcal{D}(f)$, jestliže

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \ \delta > 0 \ \forall x' \in I, |x - x'| < \delta \ : \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Poznámka 5.78 Funkce je tedy spojitá na daném intervalu právě tehdy, když je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a spojitá z příslušné strany v krajních bodech intervalu I, které do něj patří (tzn. zprava v levém koncovém bodě intervalu I nebo zleva v pravém koncovém bodě intervalu I). Důkazy spojitosti na intervalu se někdy budou vést takto:

(i) Zvolí se bod z intervalu I, který není pravý koncový bod tohoto intervalu a dokáže se, že funkce f je v něm spojitá zprava.

(ii) Zvolí se bod z intervalu I, který není levý koncový bod tohoto intervalu a dokáže se, že funkce f je v něm spojitá zleva.

(iii) Z Věty 5.23 pak plyne, že funkce je v každém vnitřním bodě intervalu I spojitá.

Věta 5.79. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze monotónní funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $f(I)$ je interval. Pak f je na I spojitá.*

Důkaz. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Důkaz provedeme způsobem, který je popsán v Poznámce 5.78. Nechť $x_0 \in I$ není pravý koncový bod intervalu I. Dokažme, že f je v x_0 spojitá zprava. Máme tedy dokázat, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \ \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_\delta^+(x_0) \ : \ f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože x_0 není pravý krajní bod intervalu I, existuje $x_1 \in I$ takový, že $x_0 < x_1$. Z monotonie pak plyne, že

$$\forall x \in (x_0, x_1) \ : \ f(x_0) < f(x) < f(x_1). \tag{5.8}$$

Mohou nastat dva případy: (a) $f(x_0) + \varepsilon > f(x_1)$ nebo (b) $f(x_0) + \varepsilon \leq f(x_1)$.

ad (a): Pak pro všechna $x \in (x_0, x_1) = \mathcal{R}^+_{x_1-x_0}(x_0)$ platí

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x) < f(x_1) < f(x_0) + \varepsilon,$$

tzn. pro všechna $x \in \mathcal{R}^+_{x_1-x_0}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$.
ad (b): Protože $f(I)$ je interval, $f(x_0), f(x_1) \in f(I)$, pak také $f(x_0) + \varepsilon \in f(I)$. Odtud a z faktu, že f je rostoucí na I plyne, že existuje $x_2 \in (x_0, x_1)$ takové, že $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$. Z (5.8) plyne, že pro všechna $x \in (x_0, x_2) = \mathcal{R}^+_{x_2-x_0}(x_0)$ platí

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x) < f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon,$$

tzn pro všechna $x \in \mathcal{R}^+_{x_2-x_0}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$. Důkaz spojitosti zleva pro každý bod různý od levého krajního bodu intervalu se provede podobně. □

Poznámka 5.80 Pro úplnost je třeba dodat, že tvrzení Věty 5.79 by platilo i kdybychom předpoklad ryzí monotonie ve větě zeslabili na monotonii. Důkaz takového tvrzení je o něco delší a navíc nám v dalším ryzí monotónnost bude zcela stačit.

Poznámka 5.81 Z Věty 5.79 a vlastností některých elementárních funkcí plyne:

(1) je-li $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, pak $\log_a x$ je spojitá na $(0, \infty)$,

(2) je-li $c \in \mathbb{R}$, pak x^c je spojitá na $(0, \infty)$,

(3) arcsin, arccos jsou spojité na intervalu $[-1, 1]$,

(4) arctg, arccotg jsou spojité na intervalu $\mathbb{R}$.

Věta 5.82. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Pak*

(a) f je ohraničená na $[a, b]$ (1. Weierstrassova věta),

(b) f nabývá na $[a, b]$ své nejmenší a největší hodnoty, tj. existují $\alpha, \beta \in [a, b]$ tak, že

$$f(\alpha) = \max\{f(x) \ ; \ x \in [a, b]\}, \quad f(\beta) = \min\{f(x) \ ; \ x \in [a, b]\}.$$

Důkaz. ad (a): Důkaz provedeme sporem, tzn. předpokládejme, že funkce f je spojitá na $[a, b]$ a není na $[a, b]$ ohraničená, tzn.

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists x \in [a, b] \ : \ |f(x)| > K,$$

tedy postupně pro K nabývající hodnot 1, 2, 3, ... existují x_1, x_2, x_3, ... z intervalu $[a, b]$ tak, že

$$|f(x_n)| \geq n \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Dostali jsme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ bodů z intervalu $[a, b]$ tak, že platí (5.9). Protože $[a, b]$ je ohraničený, je i posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ohraničená a podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty (Věta 3.94) existuje z ní vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, která je konvergentní – označme její limitu písmenem c, tzn. $c \in [a, b]$. Protože f je spojitá na $[a, b]$ a tedy i v c (popř. jen jednostranně, je-li $c = a$ nebo $c = b$), pak podle Heineovy věty (Věta 5.70) je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(c)$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| = |f(c)| < \infty. \tag{5.10}$$

Naopak, podle (5.9) platí

$$|f(x_{k_n})| \geq k_n \geq n \to \infty, \quad \text{pro } n \to \infty,$$

neboli $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| = \infty$, což je ve sporu s (5.10).

ad (b): Podle části (a) je funkce ohraničená, tedy $\sup f([a,b]), \inf f([a,b]) \in \mathbb{R}$. Dokažme, že existuje $\max f([a,b])$. Označme

$$G = \sup f([a,b]) = \sup\{f(x) \ ; \ x \in [a,b]\}.$$

Stačí tedy ukázat, že $G \in f([a,b])$. Podle Cvičení 3.50 existuje posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z $f([a,b])$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = G$. Podle definice množiny $f([a,b])$ existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z $[a,b]$ taková, že $f(x_n) = y_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = G.$$

Protože $[a,b]$ je ohraničený interval, je i posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená a podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty (Věta 3.94) existuje z ní vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která je konvergentní – označme její limitu písmenem d, tzn. $d \in [a,b]$. Protože f je spojitá na $[a,b]$ a tedy i v d (popř. jen jednostranně, je-li $d = a$ nebo $d = b$), pak podle Heineovy věty (Věta 5.70) je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(d).$$

Protože $\{f(x_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z konvergentní posloupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, má stejnou limitu, tzn. $f(d) = G$, z čehož plyne, že

$$G \in f([a,b]).$$

To dokazuje, že množina $f([a,b])$ má největší prvek a ten je roven $f(d)$. □

Poznámka 5.83 Předpoklad spojitosti funkce a uzavřenosti a ohraničenosti intervalu $[a,b]$ je nezbytný. Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1].$$

Tato funkce je sice na $(0,1]$ spojitá a interval je ohraničený, ale funkce f ohraničená není (na každém pravém redukovaném okolí bodu 0).

Poznámka 5.84 Spojitost na funkce na intervalu závisela na pravdivosti výroku

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x' \in I, |x - x'| < \delta \ : \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Zde evidentně volba δ závisí na volbě ε i $x \in I$. Co se stane, když bude volba δ nezávislá na x? Dostáváme nový pojem spojitosti.

Definice 5.85 Funkce f se nazývá *stejnoměrně spojitá* na intervalu $I \subset \mathcal{D}(f)$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x, x' \in I, |x - x'| < \delta \ : \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Poznámka 5.86 (Geometrický význam stejnoměrné spojitosti) Stejnoměrnou spojitost funkce můžeme otestovat pomocí jejího grafu následujícím způsobem. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ tak, že graf f nesmí protnout současně horní i dolní základnu obdélníku o šířce δ a výšce ε při jakémkoliv jeho umístění (jeho strany jsou rovnoběžné s osami x, y).

Příklad 5.87 Dokažte, že

(1) funkce sin je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$,

(2) funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není na $(0, 1]$ stejnoměrně spojitá.

Řešení. ad (1): Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Aby sin byla stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$, je třeba nalézt $\delta > 0$ tak, aby pro každé dvě čísla $x, x' \in I$ takové, že $|x - x'| < \delta$ platilo

$$|\sin x - \sin x'| < \varepsilon.$$

To ale plyne z nerovnosti

$$|\sin x - \sin x'| \le |x - x'|,$$

platící pro všechna $x, x' \in \mathbb{R}$, tzn. stačí zvolit $0 < \delta \le \varepsilon$.
ad (2): Máme dokázat, že

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x, x' \in I, |x - x'| < \delta\ :\ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| \ge \varepsilon.$$

Označíme-li $x_n = \frac{1}{n}$, $x'_n = \frac{1}{2n}$, pak

$$|x_n - x'_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \left|\frac{2-1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

a přitom

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x'_n}\right| = |n - 2n| = n \ge 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Stačí tedy vzít $\varepsilon = 1$ a pak pro všechna $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ existuje (podle Archimedova axiomu) $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\delta \ge \frac{1}{n}$. A k tomuto přirozenému číslu existuje dvojice $x_n, x'_n \in (0, 1]$ tak, že $|x_n - x'_n| \le 1/n < \delta$ a

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x'_n}\right| \ge 1 = \varepsilon.$$

○

Věta 5.88 (Heineova–Cantorova)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Pak f je na $[a, b]$ stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. (sporem) Předpokládejme, že f je spojitá na $[a, b]$, ale není na tomto intervalu stejnoměrně spojitá. To znamená, že

$$\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \exists x, x' \in [a, b],\ |x - x'| < \delta\ :\ |f(x) - f(x')| \ge \varepsilon_0.$$

Postupnou volbou $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ dostáváme dvě posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z Bolzanovy–Weierstrassovy věty plyne, že z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, přitom zase podle Věty 3.41 platí, že tato limita leží v intervalu $[a,b]$, tzn. $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha \in [a,b]$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq |x'_{k_n} - \alpha| \leq |x'_{k_n} - x_{k_n}| + |x_{k_n} - \alpha| < \frac{1}{k_n} + |x_{k_n} - \alpha| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Tedy z věty o třech limitách také $\lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = \alpha$. Ze spojitosti a Heineovy věty (Věta 5.70) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x'_{k_n}) = f(\alpha).$$

Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varepsilon_0 \leq |f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \leq |f(x_{k_n}) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x'_{k_n})| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty,$$

což je spor s tím, že $\varepsilon_0 > 0$. □

Věta 5.89 (1. Bolzanova)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Pak existuje* $c \in (a,b)$ *tak, že* $f(c) = 0$.

Důkaz. Pro určitost předpokládejme, že $f(a) < 0 < f(b)$. Položme

$$M = \{x \in [a,b] \ ; \ f(x) < 0\}.$$

Zřejmě $a \in M$, tzn. $M \neq \emptyset$ a $M \subset [a,b]$, tzn. M je ohraničená shora. Odtud plyne, že $\sup M \in \mathbb{R}$; označíme-li ho písmenem c, zřejmě $c \in [a,b]$. Dokážeme, že $f(c) = 0$. Existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z množiny M (tzn. $x_n \leq c$) tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ (viz Cvičení 3.50). Protože je f v bodě c spojitá, pak podle Heineovy věty (Věta 5.70) platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$, a podle Věty 3.41 platí $f(c) \leq 0$. Dokažme rovnost $f(c) = 0$ – sporem. Nechť $f(c) < 0$. Pak $c < b$. A ze spojitosti f v bodě c a z Věty 5.68 (vlastně z modifikace této věty pro spojitost zprava) plyne existence $\mathcal{R}_\delta^+(c) = (c, c+\delta)$ tak, že

$$f(x) < 0, \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{R}_\delta^+(c).$$

To znamená, že $(c, c+\delta) \subset M$, což je ve sporu s faktem $c = \sup M$. Opravdu tedy platí $f(c) = 0$. □

Poznámka 5.90

- Předchozí věta představuje tzv. postačující podmínku pro existenci řešení rovnice

  $$f(x) = 0.$$

  Kdybychom navíc přidali podmínku ryzí monotonie funkce f, řešení rovnice $f(x) = 0$ by bylo jediné.

- Z Bolzanovy věty také plyne, že pokud funkce je na nějakém intervalu nenulová a spojitá, pak tato funkce má na celém intervalu buď všechny funkční hodnoty kladné nebo všechny jsou záporné, říkáme, že „funkce nemění na intervalu znaménko“. Toho se často používá na střední škole při řešení nerovnic. Uvažujme nerovnici

$$(x-2)(x+3) < 0.$$

Nejprve se vyřeší příslušná rovnice. Kořeny této rovnice rozdělí množinu všech reálných čísel na intervaly; v tomto případě to jsou: $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$, $(2, \infty)$. Pak se znaménko levé strany nerovnice na jednotlivých intervalech určí podle dosazení *jediné* hodnoty z toho kterého intervalu.

Věta 5.91 (2. Bolzanova)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$; $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ jsou takové, že $f(x_1) < f(x_2)$. Pak ke každému $a \in \mathbb{R}$ pro které platí $f(x_1) < a < f(x_2)$ existuje c ležící v (otevřeném) intervalu s krajními body x_1, x_2 tak, že*

$$f(c) = a.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$ a $f(x_1) < f(x_2)$. Definujme pomocnou funkci

$$g(x) = f(x) - a, \quad x \in I.$$

Pak je funkce g spojitá na intervalu $[x_1, x_2]$ a

$$g(x_1) = f(x_1) - a < 0 \quad \text{a} \quad g(x_2) = f(x_2) - a > 0,$$

takže g splňuje předpoklady 1. Bolzanovy věty (Věta 5.89) na intervalu $[x_1, x_2]$. Podle ní existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že $g(c) = 0$, tzn. $f(c) - a = 0$. □

Důsledek 5.92. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak $f(I)$ je také interval.*

Věta 5.93. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu $I \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) = I$. Pak f^{-1} je spojitá na intervalu $f(I)$.*

Důkaz. Z ryzí monotonie plyne existence inverzní funkce. Pak ale i f^{-1} je ryze monotónní. Podle Důsledku 5.92 je $f(I)$ interval. Tedy f^{-1} zobrazuje interval $f(I)$ na interval $f^{-1}(f(I)) = I$. Pak podle Věty 5.79 je f^{-1} spojitá na $f(I)$. □

Lemma 5.94. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá a ryze monotónní na otevřeném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, pak $f((a, b)) = (c, d)$ (tedy obraz je rovněž otevřený interval) a platí*

(a) je-li f rostoucí na (a, b), pak

$$c = \lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{a} \quad d = \lim_{x \to b-} f(x),$$

(b) je-li f klesající na (a, b), pak

$$c = \lim_{x \to b-} f(x) \quad \text{a} \quad d = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Důkaz. Předpokládejme pro určitost, že f je rostoucí na (a,b). Z Důsledku 5.92 plyne, že $f((a,b))$ je interval. Podle Věty 5.26 a 5.27 platí

$$c = \lim_{x\to a+} f(x) = \inf f((a,b)) \leq \sup f((a,b)) = \lim_{x\to b-} f(x) = d. \tag{5.11}$$

Kdyby $c \in f((a,b)$, pak by existovalo $x_0 \in (a,b)$ tak, že $c = f(x_0)$. Vezmeme-li ovšem $x_1 \in (a,x_0)$, pak $f(x_1) < f(x_0) = c$, což je ve sporu s tím, že c je infimum $f((a,b))$. Tedy $c \notin f((a,b))$. Podobně $d \notin f((a,b))$. Odtud okamžitě plyne, že

$$f((a,b)) \subset (c,d).$$

Platí i opačná inkluze. Zvolme $y \in (c,d)$ libovolně. Pak podle (5.11) existuje $y_0 \in f((a,b))$ takový, že $c < y_0 < y$, a také existuje $y_1 \in f((a,b))$ takový, že $y_1 < y < d$. Z faktu, že $f((a,b))$ je interval plyne, že $y \in f((a,b))$. Tím je dokázána i inkluze

$$(c,d) \subset f((a,b)).$$

Dohromady platí $f((a,b)) = (c,d)$. □

Věta 5.95. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, L \in \mathbb{R}^*$.

(a) *Je-li* f *rostoucí (resp. klesající) a spojitá na nějakém* $\mathcal{R}^+_{\delta_0}(x_0)$ *a* $\lim_{x\to x_0+} f(x) = L$, *pak*

$$\lim_{y\to L+} f^{-1}(y) = x_0 \quad \textit{(resp. } \lim_{y\to L-} f^{-1}(y) = x_0\textit{)}.$$

(b) *Je-li* f *rostoucí (resp. klesající) a spojitá na nějakém* $\mathcal{R}^-_{\delta_0}(x_0)$ *a* $\lim_{x\to x_0-} f(x) = L$, *pak*

$$\lim_{y\to L-} f^{-1}(y) = x_0 \quad \textit{(resp. } \lim_{y\to L+} f^{-1}(y) = x_0\textit{)}.$$

(c) *Je-li* f *ryze monotónní na* $\mathcal{R}_{\delta_0}(x_0)$, *je spojitá na* $\mathcal{R}^+_{\delta_0}(x_0)$ *a* $\mathcal{R}^-_{\delta_0}(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, *pak*

$$\lim_{y\to L} f^{-1}(y) = x_0.$$

Důkaz. ad (a): Protože $\mathcal{R}^+_{\delta_0}(x_0)$ je otevřený interval, podle Lemmatu 5.94 je $f(\mathcal{R}^+_{\delta_0}(x_0)) = (L, d_0)$, kde $d_0 > L$. Tedy f^{-1} je definována na nějakém pravém redukovaném okolí bodu L. Dokažme, že limita funkce f^{-1} v bodě L zprava je rovna x_0, tzn. máme dokázat, že

$$\forall \mathcal{U}_\delta(x_0)\ \exists \mathcal{R}^+_\varepsilon(L)\ \forall y \in \mathcal{R}^+_\varepsilon(L) :\ f^{-1}(y) \in \mathcal{U}_\delta(x_0).$$

Zvolme tedy $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ libovolně. Pak podle Lemmatu 5.94 platí $f(\mathcal{R}^+_\delta(x_0)) = (L,d)$, kde $d > L$. Pak existuje $\mathcal{R}^+_\varepsilon(L)$ takové, že

$$\mathcal{R}^+_\varepsilon(L) \subset (L,d).$$

Zvolme $y \in \mathcal{R}^+_\varepsilon(L)$ libovolně. Pak také $y \in f(\mathcal{R}^+_\delta(x_0))$, tedy existuje $x \in \mathcal{R}^+_\delta(x_0)$ takové, že $y = f(x)$. Tím je tedy dokázáno, že

$$f^{-1}(y) = x \in \mathcal{R}^+_\delta(x_0) \subset \mathcal{U}_\delta(x_0).$$

ad (b): Tvrzení se dokáže podobně jako (a).
ad (c): Podle (a) a (b) máme

$$\lim_{y\to L+} f^{-1}(y) = x_0 = \lim_{y\to L-} f^{-1}(y),$$

tedy s využitím Věty 5.20 je důkaz hotov. □

Definice 5.96 Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se nazývá darbouxovská na intervalu $I\subset\mathcal{D}(f)$, jestliže má tuto vlastnost:
Pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ a každé $\gamma \in (f(x_1), f(x_2))$ existuje ξ ležící mezi x_1, x_2 tak, že $f(\xi) = \gamma$.

Poznámka 5.97

(a) Věta 5.91 říká, že každá spojitá funkce na daném intervalu je na něm darbouxovská.

(b) Darbouxovská funkce nemusí být spojitá, viz dále funkci f z Příkladu 8.5.

(c) Funkce $\operatorname{sgn} x$ není darbouxovská.

Kapitola 6

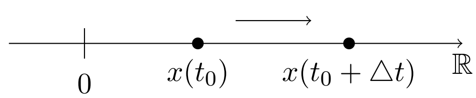
Derivace funkce

Jedním z hlavních důvodů, proč se zabývat limitou funkce, bylo vytvoření matematického aparátu umožňujícího zavést pojem *derivace funkce*.

Úloha 6.1 (o okamžité rychlosti) Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce. Jeho pohyb je popsán funkcí

$$x : t \mapsto x(t),$$

jejíž funkční hodnota $x(t) \in \mathbb{R}$ charakterizuje umístění hmotného bodu na přímce v časovém okamžiku $t \in \mathbb{R}$ (t od anglického *time*) – viz Obrázek 6.1.



Obrázek 6.1: Hmotný bod na přímce.

Zajímá nás, čemu se rovná okamžitá rychlost hmotného bodu v nějakém časovém okamžiku $t_0 \in \mathbb{R}$.

Řešení. Uvažujme kladné (malé) reálné číslo $\triangle t$. Pak snadno lze vypočítat průměrnou rychlost hmotného bodu v časovém intervalu $[t_0, t_0 + \triangle t]$, což je podíl

$$\frac{x(t_0 + \triangle t) - x(t_0)}{\triangle t}.$$

Ten se dá chápat jako přibližná hodnota okamžité rychlosti hmotného bodu v čase t_0, přitom čím je $\triangle t$ menší, tím je hodnota podílu bližší okamžité rychlosti v čase t_0. Limitu

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{x(t_0 + \triangle t) - x(t_0)}{\triangle t}$$

(pokud existuje) lze tedy prohlásit za okamžitou rychlost hmotného bodu. Tento výsledek se dá zobecnit pro pohyb hmotného bodu v prostoru (trojrozměrném). Stačí si uvědomit, že polohu bodu v čase lze charakterizovat pomocí souřadnic (vůči nějaké vztažné soustavě) jako uspořádanou trojici funkcí (x_1, x_2, x_3). Naši úvahu lze aplikovat na tyto tři souřadnice zvlášť a dostáváme tak jednotlivé složky vektoru rychlosti hmotného bodu v čase t_0, což je

$$\left(\lim_{\triangle t \to 0} \frac{x_1(t_0 + \triangle t) - x_1(t_0)}{\triangle t}, \lim_{\triangle t \to 0} \frac{x_2(t_0 + \triangle t) - x_2(t_0)}{\triangle t}, \lim_{\triangle t \to 0} \frac{x_3(t_0 + \triangle t) - x_3(t_0)}{\triangle t} \right).$$

Úloha 6.2 (o tečně) Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Nalezněte tečnu ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Řešení. Úkolem je najít přímku, která se „dotýká“ grafu funkce v daném bodě. Hledáme tedy rovnici přímky

$$t : y = kx + q.$$

Stačí najít hodnoty parametrů $k, q \in \mathbb{R}$. Protože tečna obsahuje bod $(x_0, f(x_0))$, dosazením tohoto bodu do rovnice přímky dostáváme

$$q = f(x_0) - kx_0.$$

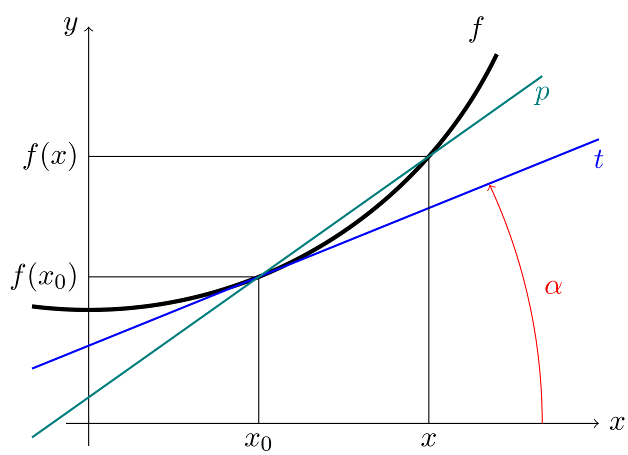
Zbývá tedy určit hodnotu parametru k – tzv. směrnici přímky. Ta totiž udává, jaký má přímka „sklon“, přesně řečeno:

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

kde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je orientovaný úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou x ($\alpha = 0$, je-li přímka rovnoběžná s osou x) – viz Obrázek 6.2. K jednoznačnému určení přímky potřebujeme mít dva body. Kde ale vzít druhý bod, když ze zadání spíš plyne, že by měla tečna procházet jen jedním bodem grafu funkce? Hlavní myšlenka řešení tohoto zapeklitého problému spočívá v tom, že za druhý bod si vezmeme bod grafu $(x, f(x))$ kde $x \in \mathcal{D}(f)$, $x \neq x_0$ a vyšetříme co se děje pro $x \to x_0$. Uvažujme pomocnou přímku p procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x, f(x))$. Její směrnice je pak rovna podílu

$$\tilde{k}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Všechno závisí na předpokladu, že čím bližší je x k číslu x_0, tím bližší je $\tilde{k}(x)$ ke směrnici tečny – viz Obrázek 6.2. A nyní přichází na scénu pojem limity funkce. Díky němu lze naši



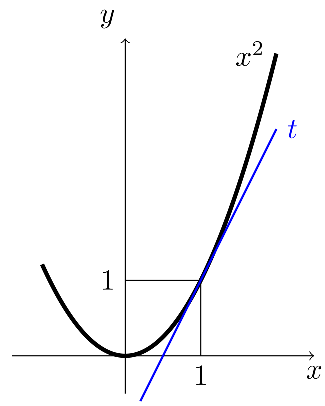
Obrázek 6.2: Hledání směrnice tečny: graf funkce f, tečna t a pomocná přímka p.

úvahu přesně vyjádřit rovností

$$k = \lim_{x \to x_0} \tilde{k}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Píšeme-li místo x výraz $x_0 + h$, kde $h \to 0$, pak limitu lze napsat také ve tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Obrázek 6.3: Tečna ke grafu funkce x^2 v bodě $(1,1)$.

○

Příklad 6.3 Nalezněte tečnu ke grafu funkce $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení. Stačí určit koeficienty $k, q \in \mathbb{R}$ rovnice tečny tak, jak bylo ukázáno v řešení Úlohy 6.2. Dostáváme

$$k = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$$

a

$$q = 1 - 2 \cdot 1 = -1.$$

Hledaná tečna má rovnici

$$y = 2x - 1,$$

viz Obrázek 6.3. ○

Definice 6.4 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na nějakém $\mathcal{U}(x_0)$. Řekneme, že funkce f má *derivaci v bodě* x_0, jestliže existuje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{neboli} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tuto limitu nazýváme *derivací funkce* f *v bodě* x_0 a značíme ji $f'(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\right)_{x=x_0}$, $(f(x))'|_{x=x_0}$. Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ mluvíme o *vlastní derivaci*, je-li $f'(x_0)$ rovno ∞ nebo $-\infty$ mluvíme o *nevlastní derivaci*. Podíl $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, resp. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se nazývá *diferenční podíl*; $f(x) - f(x_0)$, resp. $f(x_0 + h) - f(x_0)$ se nazývá *přírůstek funkce* f; $x - x_0$ resp. h se nazývá *přírůstek nezávisle proměnné*.

Definice 6.5 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na nějakém $\mathcal{U}^+(x_0)$ (resp. $\mathcal{U}^-(x_0)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci zprava (resp. zleva), jestliže existuje

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 zprava (resp. zleva) značíme $f'_+(x_0)$ (resp. $f'_-(x_0)$).

Poznámka 6.6 Lze také psát

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Věta 6.7.

(i) Funkce má v daném bodě nejvýše jednu derivaci.

(ii) Funkce f má v x_0 derivaci právě tehdy, když má derivaci zleva a derivaci zprava, které jsou si rovny. Existuje-li $f'(x_0)$, pak platí

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Důkaz. Tvrzení je důsledkem jednoznačnosti limity funkce a vztahu mezi limitou a jednostrannými limitami. □

Příklad 6.8 Vypočtěte $f'(x_0)$, kde

(a) $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$,

(c) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

Řešení.

(a) Snadno vidíme, že

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

(b) Platí

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} -\frac{1}{x} = \infty,$$

z čehož plyne, že $f'(0)$ existuje a je rovna ∞.

(c) Zřejmě

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0-} -1 = -1,$$

z čehož plyne, že $f'(0)$ neexistuje. ○

Věta 6.9. *Má-li funkce v bodě vlastní derivaci, je v něm spojitá.*

Důkaz. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$. Chceme dokázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Platí

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Tím je věta dokázána (všimněme si jak důležitý byl předpoklad, že derivace je vlastní – v opačném případě by předposlední výraz byl neurčitý!). □

Poznámka 6.10

(i) Obrácená implikace k implikaci ve Větě 6.9 neplatí – viz Příklad 6.8(c).

(ii) Věta 6.9 bez předpokladu vlastní derivace neplatí – viz Příklad 6.8(b).

(iii) Existují funkce, které mají v daném bodě nevlastní derivaci a přitom jsou spojité, např. $\sqrt[3]{x}$ (kterou lze definovat na celém $\mathbb{R}$) v bodě $x_0 = 0$.

6.1 Výpočet derivace funkce v bodě

Počítání derivace podle definice je dosti neefektivní a u složitějších funkcí téměř nadlidský úkol. Vzhledem k tomu, že budeme většinou potřebovat počítat derivace elementárních funkcí, bude nám stačit umět derivovat:

- nejjednodušší elementární funkce,
- součet, rozdíl, součin, podíl funkcí a
- složenou funkci.

Derivace některých elementárních funkcí je třeba spočítat podle definice. Např. derivaci funkce x^2 v bodě x_0 jsme vypočítali v Příkladu 6.8. Na ukázku si ukažme výpočet derivace pro další tři elementární funkce. Derivace ostatních elementárních funkcí si čtenář vybaven dovedností počítat limity funkcí může jako dobré cvičení provést sám.

Příklad 6.11 Vypočtěte derivaci funkce f v bodě x_0, kde

(a) $f = \exp_a$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

(b) $f = \sin$,

(c) $f = \cos$.

Řešení. ad (a): Podle definice stačí vypočítat limitu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0}.$$

Platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = a^{x_0} \ln a,$$

kde jsme využili Příkladu 5.65 a větu o limitě složené funkce.
ad (b): S výhodou zde použijeme vzorce pro goniometrické funkce ze Cvičení 4.59. Platí

$$\begin{aligned}(\sin x)'|_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x - x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0.\end{aligned}$$

ad (c): Postupujeme podobně jako v (b). Platí

$$\begin{aligned}(\cos x)'|_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0}\\ &= -\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \sin\frac{x+x_0}{2} = -\sin x_0.\end{aligned}$$

$\bigcirc$

K počítání derivací dalších elementárních funkcí vyslovíme další věty.

Věta 6.12. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivaci v $x_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Pak platí*

(1) funkce $c \cdot f$ má v x_0 vlastní derivaci a platí

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0),$$

(2) $f \pm g$, $f \cdot g$ mají v x_0 vlastní derivaci a platí

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \quad (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

(3) pokud $g(x_0) \neq 0$, pak $\frac{f}{g}$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Důkaz. Předpokládejme existenci vlastních derivací $f'(x_0)$, $g'(x_0)$.
ad (1): Platí

$$(cf)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = cf'(x_0).$$

ad (2): Platí

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) \pm g'(x_0).\end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

kde je potřeba zdůraznit, že poslední rovnost platí také vzhledem ke spojitosti funkce g v bodě x_0, která zase plyne z Věty 6.9.
ad (3): Platí

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},\end{aligned}$$

kde jsme opět využili spojitosti funkce g v bodě x_0. □

Příklad 6.13 Vypočtěte derivaci funkce tg v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

Řešení. Protože funkce tangens je definovaná jako podíl funkcí sinus a kosinus, k výpočtu stačí použít výsledky z Příkladu 6.11 a Větu 6.12(3). Platí totiž

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}'(x_0) &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' |_{x=x_0} = \frac{(\sin x)'|_{x=x_0} \cos x_0 - \sin x_0 (\cos x)'|_{x=x_0}}{\cos^2 x_0} \\ &= \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.\end{aligned}$$

○

Věta 6.14. *(o derivaci složené funkce) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci v x_0, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak $g \circ f$ má v x_0 vlastní derivaci a platí*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Důkaz. Podle předpokladů a Věty 6.9 plyne, že f je spojitá v x_0, g je spojitá v $f(x_0)$. Dále podle Věty 5.74 je $g \circ f$ spojitá. Tedy f a $g \circ f$ jsou definované na nějakém $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, g je definovaná na $\mathcal{U}_\eta(f(x_0))$. Má tedy smysl uvažovat existenci derivace $g \circ f$ v bodě x_0. Máme vypočítat limitu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}.$$

Nabízí se jednoduchý standardní trik

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ovšem v prvním zlomku je problém, protože funkce

$$x \mapsto \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

nemusí být definovaná na žádném redukovaném okolí bodu x_0 (stačí uvažovat konstantní funkci f), tedy nelze uvažovat limitu této funkce v bodě x_0. Uvažujme tedy dva případy: (a) $\exists \mathcal{R}_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \neq f(x_0)$ nebo naopak (b) $\forall \mathcal{R}_\delta(x_0)$ existuje $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí $f(x) = f(x_0)$.
ad (a): Za tohoto předpokladu můžeme použít navrhovaný trik. Označme

$$G(y) = \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}, \quad y \in \mathcal{R}_\eta(f(x_0)),$$

přitom zřejmě $\lim_{y \to f(x_0)} G(y) = g'(f(x_0))$. Podle Věty 5.49(I) pak $\lim_{x \to x_0} G(f(x)) = g'(f(x_0))$. Tedy dohromady máme

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} G(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

ad (b): Z tohoto předpokladu plyne, že existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ takových že $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f(x_n) = f(x_0)$. Z Heineovy věty (Věta 5.34) pak plyne, že

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

Protože $g'(f(x_0)) \in \mathbb{R}$, abychom dokázali naše tvrzení, stačí dokázat $(g \circ f)'(x_0) = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Z předpokladu existence vlastní derivace $g'(f(x_0))$ a Věty 5.25(a) plyne, že existuje $\mathcal{R}_{\eta_1}(f(x_0)) \subset \mathcal{R}_\eta(f(x_0))$ a $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ tak, že pro všechna $y \in \mathcal{R}_{\eta_1}(f(x_0))$ platí

$$\left| \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \right| < K.$$

Dále, protože $f'(x_0) = 0$, existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 0 \right| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Dohromady pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$\left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} - 0\right| = \begin{cases} 0 & \text{je-li } f(x) = f(x_0), \\ \left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\right| \cdot \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| & \text{je-li } f(x) \neq f(x_0), \end{cases}$$
$$< \begin{cases} \varepsilon & \text{je-li } f(x) = f(x_0), \\ K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon & \text{je-li } f(x) \neq f(x_0). \end{cases}$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 6.15. *(o derivaci inverzní funkce) Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní na nějakém $\mathcal{U}(x_0)$ a existuje vlastní nenulová derivace $f'(x_0)$. Pak funkce f^{-1} má vlastní derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$\left(f^{-1}(y)\right)'|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Důkaz. Platí

$$(f^{-1}(y))'|_{y=y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili větu o limitě složené funkce (Věta 5.49) a větu o limitě inverzní funkce (Věta 5.95). □

Příklad 6.16 Vypočtěte derivaci funkce arcsin v bodě $y_0 \in (-1, 1)$.

Řešení. Protože jde o funkci inverzní k funkci $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$, s výhodou lze využít Větu 6.15. K zadanému y_0 existuje jediné $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ tak, že $\sin x_0 = y_0$. Pak platí

$$(\arcsin y)'|_{y=y_0} = \frac{1}{(\sin x)'|_{x=x_0}} = \frac{1}{\cos x_0}.$$

S pomocí goniometrických vzorců a faktu, že $\cos x_0 > 0$ můžeme provést úpravy

$$\cos x_0 = \sqrt{\cos^2 x_0} = \sqrt{1 - \sin^2 x_0}.$$

Dostáváme tak

$$(\arcsin y)'|_{y=y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$ ○

6.2 Derivace na množině

Definice 6.17 (derivace funkce) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ je množina všech bodů $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, pro která existuje vlastní $f'(x)$. Funkci definovanou předpisem

$$M \ni x \mapsto f'(x)$$

nazýváme derivací funkce f na množině M, značíme ji f'. Říkáme pak, že funkce f *má na množině M derivaci.*

Poznámka 6.18 Řekneme-li, že funkce f má na množině M derivaci f', plyne z toho, že f má v každém bodě množiny M *vlastní* derivaci.

Příklad 6.19 Vypočtěte derivaci funkce x^2.

Řešení. Využijeme výsledků z Příkladu 6.8, kde jsme zjistili, že pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x_0) = 2x_0,$$

označíme-li $f(x) = x^2$. Odtud tedy plyne, že předpis funkce f', což je

$$f'(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro jednoduchost budeme dále psát již jen

$$\left(x^2\right)' = 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

○

Cvičení 6.20 Z definice derivace funkce v bodě, popř. z Vět 6.12, 6.14, 6.15 odvoďte následující „vzorce“:

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \in \mathcal{D}(x^{\alpha-1})$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in (0, \infty)$, speciálně pro $a = \mathrm{e}$ platí $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}$, $x \in (0, \infty)$, $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$, speciálně pro $a = \mathrm{e}$ platí $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
4. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,
5. $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$,
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$,
7. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathcal{D}(\operatorname{cotg})$,
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,
11. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,
12. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$,
13. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$,
14. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$,
15. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x \neq 0$,
16. $(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$,
17. $(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, \infty)$,
18. $(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$,
19. $(\operatorname{argcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| > 1$.

Dále z Vět 6.12, 6.14 vyplývá následující:

Důsledek 6.21. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají derivaci na množině $M \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Pak platí*

- $(cf(x))' = cf'(x)$,
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$,
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

na množině M.
Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají derivace a jejich složení $f \circ g$ má derivaci na množině M, pak platí

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x), \quad x \in M.$$

S pomocí Cvičení 6.20 a Důsledku 6.21 lze počítat derivace elemenárních funkcí.

Příklad 6.22 Podle předchozího snadno spočítáme, že platí

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 3\mathrm{e}^x + \cos 2x + x \sin x - \sqrt[3]{x^2+1})' \\
&\qquad = (x^2)' - (3\mathrm{e}^x)' + (\cos 2x)' + (x \sin x)' - (\sqrt[3]{x^2+1})' \\
&\qquad = 2x - 3(\mathrm{e}^x)' + (-\sin 2x \cdot 2) + \sin x + x \cos x - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} 2x \\
&\qquad = 2x - 3\mathrm{e}^x - 2 \sin 2x + \sin x + x \cos x - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.
\end{aligned}$$

Příklad 6.23 Nechť funkce f a g mají derivace, f je kladná. Vypočtěte derivaci funkce $f(x)^{g(x)}$.

Řešení. Funkci umocněnou na funkci můžeme opět převést na složenou funkci:

$$\begin{aligned}
\left(f(x)^{g(x)}\right)' &= \left(\mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}\right)' = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)} \, (g(x) \ln f(x))' \\
&= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x)\right).
\end{aligned}$$

○

6.3 Derivace vyšších řádů

Protože derivace funkce je funkce, nic nám nebrání uvažovat její derivaci v bodě i na množině – mluvíme pak o *druhé derivaci.*

Definice 6.24 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na nějakém okolí bodu $\mathcal{U}(x_0)$ derivaci f'. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme ji *druhou derivací funkce f v bodě x_0* a značíme $f''(x_0)$ (nebo také $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$). Má-li funkce f druhou derivaci v každém bodě množiny $M \neq \emptyset$, pak definujeme tzv. *druhou derivaci funkce f na množině M* jako

$$x \mapsto f''(x), \quad x \in M$$

a označujeme ji f''.

Poznámka 6.25 Z předchozí definice tedy vidíme, že je-li f'' definovaná na množině M, pak platí

$$f'' = (f')' \quad \text{na } M.$$

neboli druhá derivace je derivací první derivace.

Pochopitelně nám nic nebrání derivovat dál a definovat třetí, čtvrtou derivaci, atd. Přitom, jak uvidíme v dalších kapitolách, derivace vyšších řádů budou pro nás velmi užitečné. Inspirováni Definicí 6.24 a Poznámkou 6.25 zadefinujme *derivaci n-tého řádu*.

Definice 6.26 Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozumíme *n-tou derivací funkce f* derivaci její $(n-1)$-ní derivace (za předpokladu, že existuje) a značíme ji $f^{(n)}$, tzn. definujeme induktivně

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

kde pokládáme $f^{(0)} = f$.

Poznámka 6.27 Z Definice 6.26 plyne, že $f^{(n)}(x_0)$ je určena vztahem

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Z toho také je vidět, že z existence $f^{(n)}(x_0)$ plyne i existence všech nižších derivací ve všech bodech nějakého okolí bodu x_0. Navíc, je–li $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, pak f, f', …, $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$ jsou v x_0 spojité.

Příklad 6.28 Vypočtěte čtvrtou derivaci funkce

$$f(x) = x^3 - \sin x^2 + 1.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x \cos x^2, \\ f''(x) &= 6x - 2\cos x^2 + 4x^2 \sin x^2, \\ f'''(x) &= 6 + 12x \sin x^2 + 8x^3 \cos x^2, \\ f^{(4)}(x) &= 12 \sin x^2 + 48x^2 \cos x^2 - 16x^4 \sin x^2 \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}$. ○

6.4 Základní věty diferenciálního počtu

Začněme Fermatovou větou, která zhruba říká, že nabývá-li funkce své největší/nejmenší hodnoty v bodě ve kterém má derivaci, tato derivace je nulová.

Věta 6.29. *(Fermatova) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nabývá v vnitřním bodě x_0 definičního oboru funkce f největší nebo nejmenší hodnoty. Jestliže existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.*

Důkaz. Nechť $f(x_0)$ je největší hodnota funkce f, tzn.

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \ : \ f(x_0) \geq f(x).$$

Je-li $x \in \mathcal{R}^+(x_0)$, tzn. $x > x_0$, pak $f(x) - f(x_0) \leq 0$, z čehož po vydělení kladným číslem $x - x_0$ dostáváme

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Odtud

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Podobně pro $x \in \mathcal{R}^-(x_0)$ dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

ze které opět vyvozujeme, že

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Z existence $f'(x_0)$ dostáváme

$$0 \geq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \geq 0,$$

tedy $f'(x_0) = 0$. □

Věta 6.30 (Rolleova)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a*

(i) f je spojitá na $[a, b]$,

(ii) $\forall x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$ (vlastní nebo nevlastní),

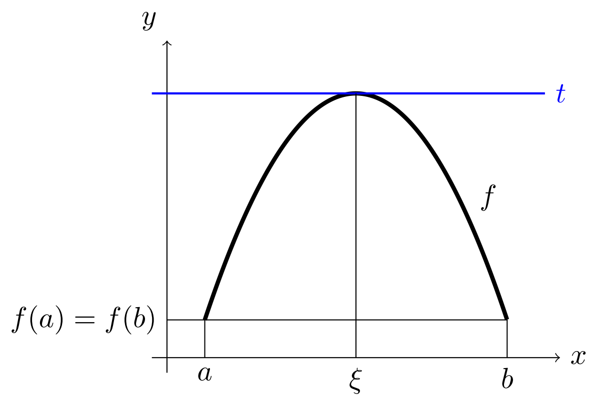
(iii) $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Podle Věty 5.82(b) a předpokladu (i) platí, že f nabývá na $[a, b]$ své největší i nejmenší hodnoty. Mohou nastat dva případy: (a) $\min_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$ nebo (b) $\min_{[a,b]} f < \max_{[a,b]} f$.
ad (a): Pak f je zřejmě konstantní na $[a, b]$, tedy $f'(\xi) = 0$ dokonce pro všechna $\xi \in (a, b)$.

ad (b): Funkce f nemůže oba extrémy současně nabývat v krajních bodech intervalu $[a, b]$. Kdyby ano, např. $f(a) = \min_{[a,b]} f$ a $f(b) = \max_{[a,b]} f$, pak by muselo platit $f(a) < f(b)$, což by bylo ve sporu s předpokladem (iii). Funkce f tedy nabývá jeden z extrémů ve vnitřním bodě intervalu (a, b), označme ho ξ. Protože podle předpokladu (ii) existuje $f'(\xi)$, platí podle Fermatovy věty, že $f'(\xi) = 0$. □

Poznámka 6.31 (geometrický význam Rolleovy věty) Pro graf funkce f splňující předpoklady Rolleovy věty platí, že k němu v nějakém bodě (jde o bod o souřadnicích $(\xi, f(\xi))$) existuje tečna rovnoběžná s osou x – viz Obrázek 6.4.



Obrázek 6.4: Geometrický význam Rolleovy věty.

Věta 6.32 (Lagrangeova). *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a jsou splněny předpoklady (i), (ii) z Rolleovy věty. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Uvažujme pomocnou funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$g(x) = f(x) - \ell(x), \quad x \in [a, b],$$

kde $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lineární funkce, jejíž graf je přímka obsahující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Snadno zjistíme její předpis:

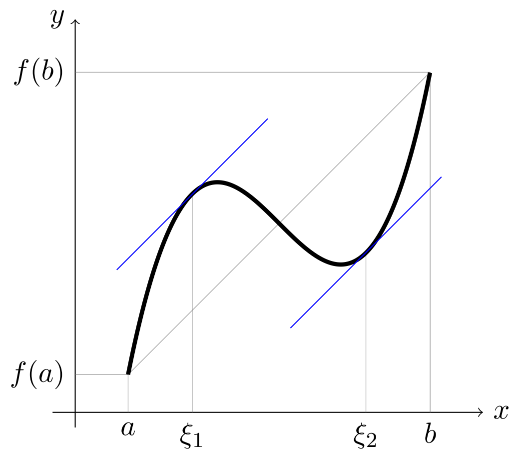
$$\ell(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podle předpokladu (i) je f spojitá na $[a, b]$ a ℓ jakožto lineární funkce je také spojitá. Pak musí být spojitá na $[a, b]$ i funkce g. Dále pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$g'(x) = f'(x) - \ell'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Konečně platí

$$g(a) = 0 = g(b).$$



Obrázek 6.5: Geometrický význam Lagrangeovy věty.

Tedy funkce g splňuje předpoklady Rolleovy věty, podle níž existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Poznámka 6.33 (geometrický význam Lagrangeovy věty) Pro graf funkce f splňující předpoklady Lagrangeovy věty platí, že k němu v nějakém bodě (jde o bod o souřadnicích $(\xi, f(\xi))$) existuje tečna rovnoběžná s přímkou obsahující body o souřadnicích $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, viz Obrázek 6.5.

Poznámka 6.34 Rovnost v tvrzení Lagrangeovy věty budeme používat zejména ve tvaru

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Často totiž budeme potřebovat pracovat s rozdílem funkčních hodnot funkce f a Lagrangeovu větu budeme moct použít v případech, kdy budeme cosi vědět o derivaci funkce f na intervalu (a,b). Např. budeme-li předpokládat, že f má kladnou derivaci na (a,b), Lagrangeova věta nám dá informaci, že $f(b) - f(a) > 0$, tzn. $f(b) > f(a)$. Nebo víme-li, že $|f'|$ je omezená na (a,b) shora konstantou M, pak z Lagrangeovy věty lze odvodit, že

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a).$$

Věta 6.35 (Cauchyova)**.** *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a*

(i) f, g je spojité na $[a,b]$,

(ii) $\forall x \in (a,b)$ existuje $f'(x)$ a vlastní nenulová $g'(x)$.

Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Důkaz. Rozdělme náš důkaz do dvou částí.
Krok 1. Nejprve dokážeme, že $g(b) - g(a) \neq 0$. Kdyby platila rovnost, pak by g splňovala

předpoklady Věty 6.30, ze které plyne existence $\xi \in (a, b)$ takového, že $g'(\xi) = 0$ – to je ve sporu s nenulovostí $g'(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

KROK 2. Definujeme pomocnou funkci (inspiraci bereme z důkazu Lagrangeovy věty)

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) - f(a).$$

Pak h je spojitá na $[a, b]$ a pro všechna $x \in (a, b)$ existuje

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{(g(b) - g(a))} g'(x)$$

a

$$h(a) = 0 = h(b).$$

Z Rolleovy věty plyne existence $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{(g(b) - g(a))} g'(\xi).$$

Po jednoduché úpravě dostáváme tvrzení věty. □

Poznámka 6.36 Poznamenejme, že Rolleova věta se dá chápat jako důsledek Lagrangeovy věty a ta zase jako důsledek Cauchyovy věty. Těmto třem větám se říká *věty o střední hodnotě diferenciálního počtu*.

Pomocí předchozích vět lze dokázat celá řada užitečných vět.

Věta 6.37 (o limitě derivace)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá zprava v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a má na nějakém $\mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ derivaci. Jestliže existuje $\lim\limits_{x \to x_0+} f'(x)$, pak existuje také $f'_+(x_0)$ a platí*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f'(x).$$

Důkaz. Nejprve uvažujme libovolné $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$. Pak f splňuje na intervalu $[x_0, x]$ předpoklady Lagrangeovy věty, tedy podle ní existuje $\xi = \xi(x) \in (x_0, x) \subset \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ takové, že

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tímto způsobem je definována funkce $\xi : \mathcal{R}_\delta^+(x_0) \to \mathbb{R}$, o které navíc víme, že

$$\lim_{x \to x_0+} \xi(x) = x_0.$$

Pak platí

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} f'(\xi(x)) = \lim_{x \to x_0+} f'(x),$$

kde poslední rovnost plyne z věty o limitě složené funkce. □

Poznámka 6.38

(a) Tvrzení Věty 6.37 lze říci i pro derivaci zleva a „oboustrannou“ derivaci.

(b) Věta 6.37 nám umožňuje efektivně počítat jednostranné derivace v bodech, ve kterých funkce derivaci nemá. Např. pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ snadno určíme její derivaci, čímž je

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Bez předešlé věty bychom museli derivace $f'_+(1)$ a $f'_-(1)$ počítat pomocí definice, což není zrovna komfortní. Nyní ale snadno můžeme spočítat, že

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = \infty \quad \text{a} \quad f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = -\infty.$$

Následující větu využijeme v kapitole o primitivních funkcích.

Věta 6.39 (Darbouxova)**.** *Derivace funkce na daném intervalu je darbouxovská.*

Důkaz. Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mající na intervalu I derivaci f'. Máme dokázat, že f' je darbouxovská na I. Uvažujme libovolné $a, b \in I$, $a < b$. Předpokládejme, že platí $f(a) < f(b)$ (v opačném případě stačí uvažovat $-f$). Zvolme libovolně $\eta \in (f(a), f(b))$. Chceme najít $\xi \in (a, b)$ tak, že $f(\xi) = \eta$. Uvažujme pomocnou funkci

$$F(x) = f(x) - \eta x, \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Protože $F'(x) = f'(x) - \eta$ pro $x \in [a, b]$, je funkce F spojitá na celém intervalu $[a, b]$. Z Věty 5.82 plyne, že F nabývá na tomto intervalu svého maxima i minima. Protože $F'_+(a) = f'_+(a) - \eta > 0$, pak z varianty Věty 5.31 pro jednostrannou limitu existuje $\mathcal{R}^+(a)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} > 0$$

pro všechna $x \in \mathcal{R}^+(a)$, a tedy $F(a) < F(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{R}^+(a)$. Odtud plyne, že $F(a)$ není maximem funkce F na $[a, b]$. Podobně, protože $F'_-(b) = f'_-(b) - \eta < 0$, pak existuje $\mathcal{R}^-(b)$ tak, že $F(b) < F(x)$ pro $x \in \mathcal{R}^-(b)$ (nakreslete si). Tedy ani $F(b)$ nemůže být maximem. Funkce F tedy nabývá svého maxima v nějakém bodě $\xi \in (a, b)$, z čehož podle Fermatovy věty plyne, že $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \eta$. □

6.5 l'Hospitalovo pravidlo

Pravidlo, které si nyní ukážeme, slouží k efektivnímu počítání limit – ovšem za předpokladu znalosti derivování.

Věta 6.40 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivace na nějakém $\mathcal{R}(x_0)$. Je-li splněna jedna z podmínek:*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$,

pak platí implikace

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^* \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ a je rovna } L.$$

Důkaz. Tento důkaz je poměrně dlouhý, protože je potřeba vyšetřit spoustu speciálních případů. Dokažme větu za předpokladu platnosti (i) a pro $x_0 \in \mathbb{R}$. Navíc stačí tvrzení dokázat pouze pro jednostranné limity. Předpokládejme tedy, že

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0+} g(x) = 0,$$

funkce f a g mají derivace na $\mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ a

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Máme dokázat, že

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Protože $x_0 \in \mathbb{R}$, můžeme funkce f a g „spojitě rozšířit“ na celé $\mathcal{U}_\delta^+(x_0)$, tzn. funkce $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisy

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pokud } x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0), \\ 0 & \text{pro } x = x_0, \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pokud } x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0), \\ 0 & \text{pro } x = x_0, \end{cases}$$

jsou spojité na $\mathcal{U}_\delta^+(x_0)$. Pro libovolné $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ pak funkce $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ splňují na intervalu $[x_0, x]$ předpoklady Cauchyovy věty, podle níž pak existuje $\xi = \xi(x) \in (x_0, x) \subset \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ takové, že

$$\frac{\tilde{f}'(\xi(x))}{\tilde{g}'(\xi(x))} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)}.$$

Odtud ovšem pro $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ plyne

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{\tilde{f}'(\xi(x))}{\tilde{g}'(\xi(x))} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Uvažujme tedy funkci $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\xi : x \mapsto \xi(x)$), o které dále víme, že

$$\lim_{x \to x_0+} \xi(x) = x_0.$$

Dohromady dostáváme

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili větu o limitě složené funkce. $\square$

Poznámka 6.41

(a) Věta 6.40 se používá k výpočtu limit typu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

pro neurčité výrazy $\frac{0}{0}$ (případ (i)) a $\frac{\infty}{\infty}$ (případ (ii)).

(b) Před použitím této věty je třeba ověřit platnost podmínky (i) nebo (ii).

(c) Tvrzení je ve tvaru implikace! Opačná implikace ve větě neplatí, tzn. neexistuje-li $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak Věta 6.40 o limitě $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ nic neříká – viz Příklad 6.42(4).

(d) l'Hospitalovo pravidlo samozřejmě platí i pro jednostranné limity – viz Příklad 6.42(3).

Příklad 6.42 Vypočtěte

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15}$,
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0+} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Řešení. ad (1):

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 3} \frac{4x-3}{2x+2} = \frac{9}{8}.$$

ad (2):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

ad (3): Platí

$$\lim_{x\to 0+} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin x}\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{\ln(1-x)}{\sin x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1-x)}{\sin x}}.$$

Tedy stačí vypočítat limitu v exponentu, ale ta je ve tvaru podílu a jsou splněny předpoklady použití l'Hospitalova pravidla. Platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1-x)}{\sin x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1-x}(-1)}{\cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\cos x(x-1)} = -1.$$

Počítaná limita je rovna e^{-1}.
ad (4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

přičemž limita napravo neexistuje (dokažte). Ale přitom

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$ ○

Kapitola 7

Aplikace diferenciálního počtu

Nyní se podívejme, kde všude je derivace funkce užitečná. V této části se podíváme, jak lze pomocí derivací nahrazovat složité funkce polynomy a jak vyšetřovat průběh funkce a její globální extrémy.

7.1 Aproximace funkce

Konečně se dostáváme do části věnované jedné z aplikací diferenciálního počtu. Aproximací funkce rozumíme nahrazení nějaké složitější funkce funkcí jednodušší – v určitém smyslu. Proč bychom to dělali? Např. téměř všechny elementární funkce jsou poměrně složité, protože neumíme vypočítat jejich funkční hodnoty v libovolném bodě – vlastně všechny až na polynomické. Co ale dělat, potřebujeme-li vypočítat funkční hodnotu funkce sinus v bodě 1? Nebo chceme vykreslit část grafu na nějakém intervalu. Řešením je najít funkci, která sice není sinem, ale je mu *v nějakém smyslu dostatečně blízká.* V této kapitole se něco dozvíme o *lokální aproximaci polynomy.* To zhruba znamená, že k funkcím hledáme polynomy, které na nějakém okolí zadaného bodu mají „dostatečně blízké“ hodnoty.

Začněme nejprve nejjednodušším možným případem – aproximujme funkci v okolí nějakého bodu **konstantní funkcí**. Tento problém nastává v případě, kdy potřebujeme přibližné funkční hodnoty funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pouze z nějakého okolí bodu x_0, přitom chceme nahradit všechny hodnoty funkce jedinou hodnotou. Za předpokladu, že je funkce f v bodě x_0 spojitá, pak víme, že je-li x dostatečně blízko x_0, pak $f(x)$ se blízké $f(x_0)$. Tedy spojitou funkci f v okolí bodu x_0 nahradíme (aproximujeme) konstantní funkcí

$$P_0(x) = f(x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

viz Obrázek 7.1a.

Jak naše poněkud nepřesné požadavky formulovat přesně? Mějme dán bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je v bodě x_0 *spojitá.* Najděte konstantní funkci $P_0(x) = q$, $x \in \mathbb{R}$, která splňuje podmínku

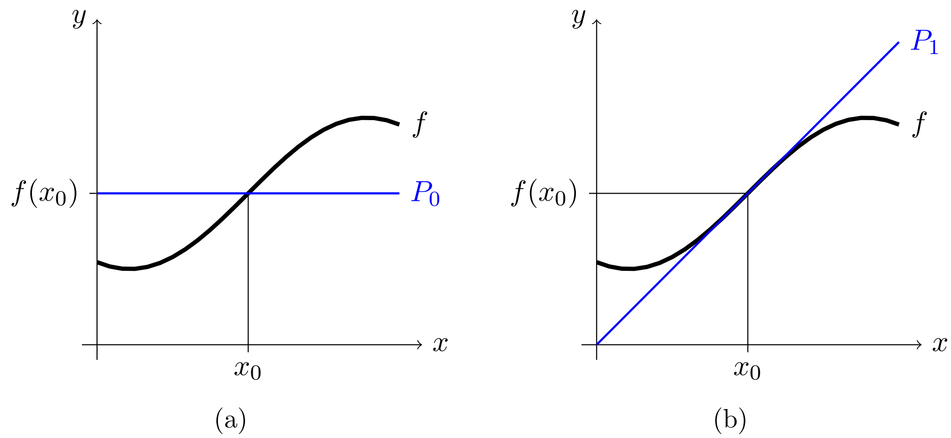
$$f(x_0) = P_0(x_0).$$

Vyřešení tohoto problému je snad jasné: Máme hledat takovou konstantu $q \in \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$f(x_0) = P_0(x_0) = q.$$

Tím je problém vyřešen.

Sami ale nejspíš cítíte, že aproximace konstantní funkcí je dosti nepřesná. Ukažme to na příkladu.



Obrázek 7.1: Aproximace funkce f v bodě x_0 konstantní a lineární funkcí.

Příklad 7.1 Uvažujme exponenciální funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$ a bod $x_0 = 0$. Podle našich úvah je nejlepší konstantní funkce aproximující f v x_0 funkce

$$P_0(x) = \mathrm{e}^0 = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podle očekávání pro x bližší číslu 0 je vypočítané $P_0(x)$ bližší přesné hodnotě e^x, viz Tabulku 7.1. A naopak, pokud je x vzdálenější od x_0, pak $f(x)$ se od $P_0(x)$ může lišit tak, že

x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
e^x	0.368	0.905	0.990	0.999	1	1.001	1.010	1.105	2.718
$P_0(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathrm{e}^x - P_0(x)$	-0.632	-0.095	-0.010	-0.001	0	0.001	0.010	0.105	1.718

Tabulka 7.1: Některé funkční hodnoty exponenciální funkce a její konstantní aproximace v bodě $x_0 = 0$.

aproximace pro tyto hodnoty nemá smysl. ◯

Z Příkladu 7.1 je vidět, že aproximace funkce pomocí konstantní funkce má smysl pouze a jen v případě, když funkce se v okolí tohoto bodu příliš nemění a to ještě na okolí o velmi malém poloměru.

Smysluplnější je aproximovat funkci **lineární funkcí**. Přesně řečeno: Je zadaná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Naším úkolem je najít lineární funkci $P_1(x) = k(x - x_0) + q$, $x \in \mathbb{R}$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, která „co nejlépe vystihuje" funkci f na okolí bodu x_0. Z předchozích poznámek tušíme, že budeme požadovat po této lineární funkci aby $f(x_0) = P_1(x_0)$. Z této podmínky dostáváme

$$f(x_0) = P_1(x_0) = q.$$

Zbývá najít druhou podmínku k určení hodnoty koeficientu k. Můžeme k ní dojít třeba touto úvahou: Pro $x \in \mathcal{R}(x_0)$ rozdíl $|x - x_0|$ vyjadřuje vzdálenost bodu x od x_0 a rozdíl $|f(x) - P_1(x)|$ vyjadřuje chybu aproximace. Naším cílem je aby chyba aproximace byla tím menší, čím menší je vzdálenost x od x_0. Vyjádřeme proto podíl chyby a změny argumentu

$$\frac{|f(x) - P_1(x)|}{|x - x_0|} = \left| \frac{f(x) - k(x - x_0) - q}{x - x_0} \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k \right|.$$

Podíl chyby a vzdálenosti od x_0 může být tedy nejméně nulový – to odpovídá situaci, kdy chyba je oproti vzdálenosti $|x - x_0|$ nicotná. Přitom tento případ nastává pouze v jediné situaci, a to když

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k \right| = 0.$$

Tato rovnost je ale ekvivalentní s rovností $|f'(x_0) - k| = 0$, tzn. $k = f'(x_0)$. Tím jsme dostali hodnotu parametru k. Když si navíc uvědomíme, že $P_1'(x_0) = k$, pak podmínku, kterou jsme hledali můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f'(x_0) = P_1'(x_0).$$

Celkově tedy dostáváme vzorec pro nejlepší lineární aproximaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mající vlastní derivaci v bodě* x_0 a tím je funkce

$$P_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Nepřekvapí nás snad fakt, že grafem této funkce je tečna ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Příklad 7.2 Uvažujme opět exponenciální funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$ a bod $x_0 = 0$. Podle našich úvah je nejlepší lineární funkce aproximující f v x_0 funkce

$$P_1(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podle očekávání pro x bližší číslu 0 je vypočítané $P_1(x)$ bližší přesné hodnotě e^x, viz Tabulku 7.2.

x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
e^x	0.368	0.905	0.990	0.999	1	1.001	1.010	1.105	2.718
$P_1(x)$	0	0.900	0.990	0.999	1	1.001	1.010	1.100	2
$\mathrm{e}^x - P_1(x)$	0.3679	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0.7183

Tabulka 7.2: Některé funkční hodnoty exponenciální funkce a její lineární aproximace v bodě $x_0 = 0$.

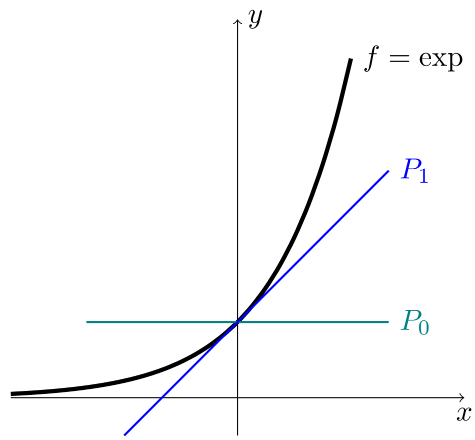
Srovnáním příslušných tabulek v tomto příkladu a z Příkladu 7.1 vidíme, že s lineární aproximací dosahujeme daleko větší přesnosti. Dobré srovnání mezi konstantní a lineární aproximací exponenciální funkce nám dává Obrázek 7.2, kde lze vidět, že konstantní funkce nám dává dobré výsledky pouze pro velmi malá x, přitom rozdíly ve funkčních hodnotách funkce e^x a P_1 jsou poměrně malé i na o něco větším okolí bodu 0. Podíváme-li se ale na krajní sloupce Tabulky 7.2 vidíme, že chyby, kterých se dopouštíme pro $x = \pm 1$ jsou tak veliké, že naše aproximace pro tyto hodnoty jsou nepoužitelné. V dalším uvidíme, jak zvýšit přesnost i tak daleko od x_0. ○

Nejlepší lineární aproximaxi funkce f v bodě x_0 jsme tedy odvodili tak, že jsme uvažovali „chybovou funkci“

$$\eta(x) = f(x) - P_1(x),$$

kde $P_1(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$. Přitom jsme zjistili, že k určení parametru k jsme naložili limitní podmínku

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{x - x_0} = 0.$$



Obrázek 7.2: Graf funkce e^x společně se svou konstantní a lineární aproximací v bodě 0.

Z definice η tedy přímo můžeme psát, že platí

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + \eta(x), \quad \text{kde } \lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{x - x_0} = 0.$$

Přitom jsme zjistili, že tato rovnost platí právě tehdy, když $k = f'(x_0)$. Limitní podmínka nám říká, že pokud x je blízké x_0, pak chyba které se dopustíme je ještě mnohem menší.

Tyto myšlenky lineární aproximace nás vedou k pojmu *diferenciálu funkce*.

Definice 7.3 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na $\mathcal{U}(x_0)$. Funkci f nazýváme *diferencovatelnou v bodě* x_0, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - kh}{h} = 0.$$

Lineární funkci $h \mapsto kh$ nazýváme *diferenciálem funkce* f *v bodě* x_0 a značíme symbolem $\mathrm{d}f(x_0)$, tzn. jde o funkci danou předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = kh, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Věta 7.4 (o existenci a jednoznačnosti diferenciálu)**.** *Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ diferencovatelná právě tehdy, když f má v x_0 vlastní derivaci. V tom případě platí*

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme nutnost. Z definice diferencovatelnosti funkce f v bodě x_0 plyne existence čísla $k \in \mathbb{R}$ takového, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - kh}{h} = 0,$$

takže po úpravě dostáváme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = k.$$

To ale neznamená nic jiného, že existuje $f'(x_0)$ a je rovna číslu k, tedy je vlastní.
Nyní dokážeme nutnost této podmínky. Z existence *vlastní* derivace

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

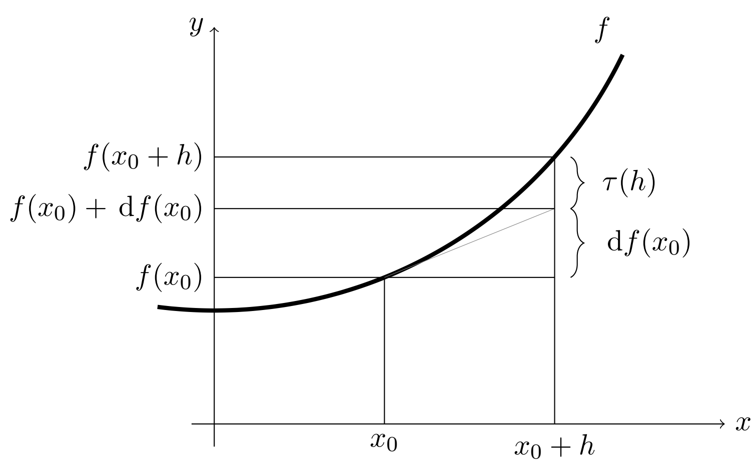
plyne

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0,$$

což podle Definice 7.3 je ekvivalentní s tím, že f je v x_0 diferencovatelná a diferenciál je dán předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

□



Obrázek 7.3: Geometrický význam diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0)$.

Poznámka 7.5 (diferenciál a výpočet přibližných hodnot) Uvažujme funkci f diferencovatelnou v bodě x_0, tzn. pro funkci

$$\tau(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$$

definovanou na nějakém okolí bodu 0, platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0.$$

Tato limitní podmínka vyjadřuje, že hodnoty $\tau(h)$ jsou pro mrňavá h ještě mnohem menší. To je důležité v tom smyslu, že $\tau(h)$ vyjadřuje velikost chyby, nahradíme-li přesnou hodnotu rozdílu (tedy diference)

$$f(x_0+h) - f(x_0),$$

číslem

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h.$$

Zde je dobře vidět význam derivace: *určuje rychlost růstu funkčních hodnot funkce.* To se dá vyjádřit přibližnou rovností

$$f(x_0+h) - f(x_0) \doteq f'(x_0)h,$$

nebo chceme-li vypočítat $f(x_0 + h)$, známe-li hodnoty $f(x_0)$ i $f'(x_0)$ přibližnou rovnost

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h,$$

pro h dostatečně blízké nule. Toto je ukázáno na Obrázku 7.3 – je potřeba si uvědomit, že pro h opravdu malá je hodnota $\tau(h)$ zanedbatelná. Provedeme-li substituci $x = x_0 + h$, dostáváme

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

pro x dostatečně blízké x_0. Diferenciál funkce f v obecném bodě x značíme symbolem $\mathrm{d}f(x)$, přitom proměnnou h nahrazujeme symbolem $\mathrm{d}x$.

Příklad 7.6 Vypočtěte diferenciál funkce

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$$

v bodě $x_0 = 2$.

Řešení. Platí $f'(x) = 3x^2 - 8x$, tedy $f'(2) = 3\cdot 4 - 8\cdot 2 = -4$. Odtud plyne $\mathrm{d}f(2)(h) = -4h$, $h \in \mathbb{R}$. Mimochodem, diferenciál funkce f v obecném bodě x má tvar

$$\mathrm{d}f(x) = (3x^2 - 8x)\,\mathrm{d}x.$$

○

Inspirováni těmito jednoduchými úlohami můžeme přejít k dalšímu zpřesnění. Z příkladů jsme viděli, že konstantní aproximace byla vhodná pouze pro případ, kdy potřebujeme funkční hodnoty velmi blízko bodu, ve kterém uvažujeme aproximaci. A také, že u lineární aproximace je interval, na kterém byly výsledky uspokojivě přesné, o něco větší. Pochopitelně se tedy můžeme ptát, nezlepší-li se výsledky aproximace, budeme-li aproximovat polynomy vyšších stupňů. Navíc očekáváme, že s vyšším stupněm polynomu bude i vyšší přesnost na větším okolí bodu x_0.

Vzniká otázka, jaké podmínky klást na aproximující polynomy? U konstantního polynomu (šlo o polynom nultého stupně nebo o nulový polynom) byla kladena podmínka jedna a to rovnosti funkčních hodnot. U lineárního polynomu (polynom nejvýše prvního stupně) jsme měli dvě podmínky, a to rovnost funkční hodnoty a derivace v bodě x_0.

Zformulujme podmínky pro polynom P_n stupně n aproximující v okolí bodu x_0 funkci f tak, aby předchozí konstantní a lineární aproximace byly speciálními případy. Jako vhodné se mohou jevit následující požadavky

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0), \quad \ldots, \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0), \tag{7.1}$$

samozřejmě za dodatečného předpokladu existence derivací až do řádu n funkce f v bodě x_0. Ve zbytku této sekce si ukážeme, že tyto podmínky dávají za jistých dodatečných předpokladů dobrou aproximaci a často nejen na nějakém malém intervalu – viz dále Větu 7.16 a Příklady 7.14, 7.18–7.21.

Nejprve je třeba vyřešit otázku, kolik polynomů splňujících podmínky (7.1) vůbec existuje. Odpověď je jednoduchá: existuje právě jeden takový polynom a dokonce umíme vypočítat jeho předpis.

Věta 7.7. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě x_0 vlastní derivace až do řádu n. Pak existuje jediný polynom stupně nejvýše n, splňující podmínky* (7.1) *a je ve tvaru*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Důkaz. Nejprve dokažme existenci: Fakt, že zmíněný polynom P_n splňuje podmínky (7.1), dokážeme pouhým dosazením bodu x_0 do P_n a jeho derivací P_n', …, $P_n^{(n)}$.
Nyní dokažme jednoznačnost: Uvažujme libovolný polynom P_n stupně nejvýše n splňující (7.1). Dokážeme, že bude mít stejný předpis jako ten z tvrzení věty. Tím ukážeme, že žádný jiný polynom tyto podmínky nesplňuje. Vzhledem k Lemmatu 4.35, existují $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k.$$

Dosazením $x = x_0$ dostáváme z (7.1) rovnost $a_0 = f(x_0)$. Dosadíme-li do derivace

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

za x číslo x_0, dostaneme opět z (7.1) rovnost $a_1 = f'(x_0)$. Opakovaným derivováním polynomu P_n, dosazováním x_0 a z podmínek (7.1) postupně dostáváme

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

□

Polynom získaný ve Větě 7.7 je tak důležitý, že má i svůj název.

Definice 7.8 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě x_0 derivaci až do řádu $n \in \mathbb{N}$. *Taylorovým polynomem stupně n funkce f se středem v bodě x_0* se rozumí polynom

$$\begin{aligned} T_n(x; f, x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Pokud je jasné, o jakou funkci f a jaký bod x_0 jde, budeme psát pouze $T_n(x)$.

Poznámka 7.9 Pro $x_0 = 0$ se Taylorův polynom nazývá *Maclaurinovým polynomem*; je tedy ve tvaru

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Zbývá odpovědět „jak dobře" T_n aproximuje funkci f – tzn. zjistit, jaké chyby se dopustíme, bereme-li $T_n(x) \approx f(x)$ v okolí bodu x_0.

Najít polynom mající stejné derivace v určitém bodě jako nějaká funkce je jedna věc, druhá věc je zjistit, zda to vůbec k něčemu bylo. Nyní se budeme zabývat tím, jak dobře aproximuje Taylorův polynom naši funkci v bodě x_0.

Definice 7.10 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě x_0 derivaci až do řádu n a nechť T_n je její Taylorův polynom stupně n se středem v bodě x_0. Označme $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Pak vyjádření

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

se nazývá *Taylorův vzorec pro funkci f stupně n se středem v bodě x_0*. Funkce $R_n(x)$ se nazývá *zbytek v Taylorově vzorci po n-tém členu* nebo také *Taylorův zbytek*.

Taylorův vzorec tedy vyjadřuje aproximaci funkce f polynomem v okolí bodu x_0, přičemž zbytek $R_n(x)$ vyjadřuje chybu, které se dopustíme, když místo přesné hodnoty $f(x)$ vypočítáme její přibližnou hodnotu $T_n(x)$.

Naši pozornost nyní upřeme ke zbytku $R_n(x)$, protože právě tím měříme to, jak je naše aproximace dobrá. Než se pustíme do obecnějších závěrů, motivujme naše úsilí následujícím příkladem, což je pokračování Příkladu 7.1 a 7.2.

Příklad 7.11 Aproximujeme funkci $f = \exp$ v okolí bodu $x_0 = 0$. Platí

$$f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

z čehož plyne, že $f^{(k)}(0) = 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= f(x_0) = 1,\\
T_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x,\\
T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2},\\
&\dots\\
T_n(x) &= 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Podívejme se nyní na vývoj chyb, kterých se dopouštíme při aproximaci Taylorovými polynomy s rostoucím n: Je vidět, že se postupně zpřesňují i funkční hodnoty v bodech $x = \pm 1$.

x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
$R_1(x)$	0.3679	0.005	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0.005	0.7183
$R_2(x)$	-0.1312	-0.0002	$-2 \cdot 10^{-7}$	$-2 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-7}$	0.0002	0.0218
$R_3(x)$	0.0345	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$4 \cdot 10^{-14}$	$4 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-6}$	0.0516
$R_4(x)$	-0.0071	$-8 \cdot 10^{-8}$	$-8 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^{-16}$	$8 \cdot 10^{-13}$	$8 \cdot 10^{-8}$	0.0099

Tabulka 7.3: Funkční hodnoty zbytků $R_n(x) = \exp x - T_n(x; \exp, 0)$ ve vybraných bodech.

Zpřesňování probíhá tím rychleji, čím blíže jsme středu aproximace, tzn. bodu 0. Nicméně pořád nevíme, jestli je to pravidlo nebo náhoda. ◯

V předchozím příkladě jsme viděli, že s rostoucím stupněm Taylorova polynomu se postupně zmenšovala chyba, tzn. $R_n(x)$ pro konkrétní x bylo s rostoucím n menší a menší. Ovšem z jednoho příkladu nemůžeme vyvozovat obecné závěry. Rádi bychom dokázali, že $R_n(x)$ se neomezeně zmenšuje k nule pro rostoucí n. Z jeho definice nic nevyčteme, protože jde jen o rozdíl aproximované funkce a Taylorova polynomu. Následující věta nám ovšem umožní napsat zbytek ve tvaru, se kterým se dobře pracuje. Právě pomocí této věty nakonec zjistíme, že aproximovat funkci f pomocí podmínek kladených na derivace v bodě x_0 je v mnoha případech dobrý nápad.

Věta 7.12 (Taylorova o zbytku)**.** *Nechť funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má na okolí* $\mathcal{U}(x_0)$ *bodu* x_0 *derivace až do řádu* $n+1$*, kde* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Pak pro každé* $x \in \mathcal{R}(x_0)$ *existuje* ξ *ležící mezi* x_0 *a* x *tak, že se Taylorův zbytek dá napsat jako*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Tomuto tvaru se říká Lagrangeův tvar zbytku*.*

Důkaz. Důkaz Taylorovy věty je poměrně jednoduchý. Vše je postaveno na dvojici funkcí F a φ proměnné t definovaných na uzavřeném intervalu s krajními body x_0 a x (pozor, x zde nabývá pevně zvolené hodnoty – nejde o proměnnou funkce!), mající předpis:

$$F(t) = f(x) - T_n(x; f, t), \quad \varphi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

Dokáže se, že tyto funkce (v uvedeném pořadí) splňují předpoklady Cauchyovy věty. Podle ní pak existuje ξ ležící mezi x_0 a x tak, že

$$\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}, \tag{7.2}$$

z čehož se po úpravě dostává požadovaná rovnost. □

Poznámka 7.13 Věta 7.12 na první pohled neříká nic moc. Říká nám, že zbytek v Taylorově vzorci lze vyjádřit jako součin, ve kterém figuruje dokonce derivace $(n+1)$-ního řádu v nějakém neznámém bodě. To v nás může vyvolat pochybnosti, protože všechno to děláme proto, abychom byly schopni spočítat (a dokonce jen přibližně) funkční hodnoty funkce f v nějakém bodě $x \neq x_0$. Jak uvidíme dále, nebude konkrétní hodnota této derivace vůbec potřeba, bude stačit vědět, že tato derivace je omezená funkce na nějakém okolí bodu x_0. Sílu Taylorovy věty budeme ilustrovat v následujícím příkladu.

Příklad 7.14 V Příkladu 7.11 jsme vypočítali Taylorův polynom funkce exp v bodě 0 nejvýše n-tého stupně a vypočítali jsme chyby v několika bodech (uvědomme si, že abychom tyto chyby vypočítali, museli jsme už znát „přesné“ hodnoty funkce exp). Obecně jsme ale nemohli říct nic o rozdílu $\exp x$ a $T_n(x; \exp, 0)$ pro $x \in \mathbb{R}$. Všechno mění Taylorova věta. Uvažujme $x \in (0, \infty)$. Podle Věty 7.12 existuje $\xi \in (0, x)$ tak, že

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Přitom pro zbytek platí následující

$$|R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

kde jsme využili faktu, že exp je rostoucí. Z tohoto odhadu a věty o třech posloupnostech vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

To ale znamená, že $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \mathrm{e}^x$. Zdůrazněme, že to platí pro *všechna* $x > 0$. Ke stejnému závěru lze dojít i pro $x < 0$. Proveďte! Kromě samotné konvergence lze dostat i odhad chyby. Uvažujme např. $x \in (0, 1]$. Pak lze psát

$$|R_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Z tohoto odhadu můžeme určit, jakého stupně má být příslušný Taylorův polynom, chceme-li aby přibližný výpočet měl chybu menší než žádané číslo. Chceme-li například, aby chyba, které se dopustíme, byla menší než $\varepsilon = 10^{-3}$, pak pro stupeň n Taylorova polynomu musí platit

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}, \quad \text{tzn.} \quad (n+1)! > 3000.$$

Protože $6! = 720$ a $7! = 5040$, poslední nerovnost platí pro $n \geq 6$. Tedy pro $x \in (0,1]$ platí

$$\exp x \doteq 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{6!} \quad \text{s chybou menší než } 10^{-3}.$$

Speciálně pro $x = 1$ dostáváme efektivní vzorec pro přibližný výpočet čísla e s chybou menší než 10^{-3}.

Poznámka 7.15 Věta 7.12 ukazuje jeden ze způsobů, jak vhodně vyjádřit Taylorův zbytek. Všimněte si, že v tvrzení se píše, že jde o Lagrangeův tvar zbytku. Existují totiž i jiné tvary zbytku. Kdybychom v důkazu Taylorovy věty položili

$$\varphi(t) = t,$$

pak bychom dostali

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)(x - \xi)^n,$$

čemuž se říká *Cauchyův tvar zbytku.* Přitom tento tvar zbytku se častěji píše

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n,$$

kde jsme položili $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, přitom $\theta \in (0,1)$. Dokonce lze Taylorovu větu zobecnit daleko víc. Za funkci φ lze vzít jakoukoliv funkci, která je spojitá na intervalu o krajních bodech x a x_0 a na jeho vnitřku má vlastní nenulovou derivaci (tedy takovou funkci φ, abychom mohli v důkazu věty použít Cauchyovu větu). Pak se z (7.2) dá odvodit obecný tvar zbytku, a to

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} (x - \xi)^n.$$

Věta 7.16. *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ derivace všech řádů, které jsou na tomto intervalu omezené stejnou konstantou, tzn. existuje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tak, že*

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)\ \forall n \in \mathbb{N} : \ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Pak pro všechna $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ platí $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, tzn.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x; f, x_0).$$

Důkaz. Zvolme $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$ libovolně. Podle Taylorovy věty dostáváme existenci $\xi \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ takového, že

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

Z předpokladu ohraničenosti derivací jedinou konstantou M pak dostáváme

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\delta^n.$$

Vzhledem k jednomu z výsledků Cvičení 3.78 máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^n}{(n+1)!} = 0,$$

a podle věty o třech limitách dostáváme, že $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. □

Poznámka 7.17 Existují ovšem případy, ve kterých aproximace Taylorovými polynomu nefunguje. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Pak platí

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

tzn. $T_n(x; f, 0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Tedy pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí, že

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x; f, 0) = 0 \neq f(x).$$

Příklad 7.18 Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$, $0 < |\xi| < |x|$ tak, že

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

kde

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Přitom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$.

Příklad 7.19 Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$, $0 < |\xi| < |x|$ tak, že

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

kde

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos\xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Přitom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$.

Příklad 7.20 Pro každé $x > -1$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$, $0 < |\xi| < |x|$ tak, že

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Přitom pro všechna $x \in (-1, 1]$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Příklad 7.21 Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pro každé $x > -1$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$, $0 < |\xi| < |x|$ tak, že

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \ldots + \binom{a}{n}x^n + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \binom{a}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}(1+\xi)^{-a},$$

Přitom pro všechna $x \in (-1,1)$ platí $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Přitom pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

7.2 Vyšetřování průběhu funkce

Diferenciální počet je skvělou pomůckou pro vyšetření některých důležitých vlastností funkce.

7.2.1 Monotónní funkce

V této sekci nás bude zajímat, jak efektivně určit intervaly, na kterých je daná funkce monotónní. Klíčová bude následující věta.

Věta 7.22. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má kladnou derivaci na intervalu (a,b). Pak f je na (a,b) rostoucí. Navíc, je-li f spojitá na $[a,b)$ (resp. na $(a,b]$, $[a,b]$), pak je rostoucí na $[a,b)$ (resp. na $(a,b]$, $[a,b]$).*

Důkaz. Předpokládejme, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a,b)$. Z Věty 6.9 plyne, že f je na (a,b) spojitá. Dokažme, že f je rostoucí na (a,b). Zvolme $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ libovolně. Pak f splňuje předpoklady Lagrangeovy věty na intervalu $[x_1,x_2]$, tedy existuje $\xi \in (x_1,x_2) \subset (a,b)$ tak, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0.$$

Tedy f je rostoucí na (a,b). Nechť navíc f je spojitá na intervalu $[a,b)$. Pak stačí už jen dokázat, že pro každé $x \in (a,b)$ platí $f(a) < f(x)$. Podle Lagrangeovy věty pro funkci f na intervalu $[a,x]$ existuje opět $\xi \in (a,x_1) \subset (a,b)$ tak, že

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) > 0.$$

Zbývající tvrzení se dokáží podobně. □

Cvičení 7.23 Dokažte druhou část tvrzení Věty 7.22 bez předpokladu existence derivace. Tedy dokažte, že platí: *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na (a,b) rostoucí. Je-li f spojitá v a zprava (resp. v b zleva), pak je rostoucí na $[a,b)$ (resp. na $(a,b]$).*

Poznámka 7.24 Z definice monotónní funkce lze snadno ukázat, že funkce f je na dané množině rostoucí/klesající právě tehdy, když funkce $-f$ je na dané množině klesající/rostoucí.

Věta 7.25. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má zápornou derivaci na intervalu (a,b). Pak f je na (a,b) klesající. Navíc, je-li f spojitá na $[a,b)$ (resp. na $(a,b]$, $[a,b]$), pak je klesající na $[a,b)$ (resp. na $(a,b]$, $[a,b]$).*

Důkaz. Uvažujme funkci $g(x) = -f(x)$, $x \in (a, b)$. Pak g má kladnou derivaci na (a, b). Podle Věty 7.22 je funkce g rostoucí a proto podle Poznámky 7.24 je f klesající. □

Příklad 7.26 Najděte intervaly ryzí monotonie funkce

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Platí $f'(x) = 3x^2 - 3$. Pak $f'(x) > 0$ právě tehdy, když $x^2 - 1 > 0$ což je zase ekvivalentní s $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Podobně $f'(x) < 0$ právě tehdy, když $x^2 - 1 < 0$ což je zase ekvivalentní s $x \in (-1, 1)$. Funkce f je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a klesající na intervalu $(-1, 1)$ (dokonce je díky spojitosti rostoucí na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$ a klesající na intervalu $[-1, 1]$). ○

Poznámka 7.27

(a) Je důležité poznamenat, že obrácené implikace z Vět 7.22 a 7.25 neplatí, tzn. rostoucí funkce nemusí mít všude kladnou derivaci (a duálně: klesající funkce nemusí mít všude zápornou derivaci). Např. funkce $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ je rostoucí na celém $\mathbb{R}$ ale přitom $f'(0) = 0$.

(b) Platí podobné tvrzení jako ve Větě 7.22 – a to dokonce ve tvaru ekvivalence! Stačí nahradit kladnou derivaci nezápornou a rostoucí funkci neklesající.

7.2.2 Lokální extrémy

S monotónností funkce souvisí pojem lokálního extrému. Totiž, v příkladech, se kterými se běžně setkáme, body lokálních extrémů oddělují intervaly s různým typem monotonie (dají se ale nalézt příklady tak „ošklivých“ funkcí, pro které toto není pravda).

Definice 7.28 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f má *v bodě* x_0 *lokální maximum* (resp. *lokální minimum*), jestliže existuje $\mathcal{U}(x_0)$ tak, že

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \leq f(x_0)) \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0).$$

Toto lokální maximum (resp. minimum) se nazývá *ostré*, jestliže existuje $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že

$$f(x) > f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) < f(x_0)) \quad \forall x \in \mathcal{R}(x_0).$$

(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrnně *(ostrými) lokálními extrémy.*

Poznámka 7.29

(a) Zdůrazněme, že bod lokálního extrému je uvažován pouze ve vnitřním bodě definičního oboru. Je-li tedy např. definiční obor dané funkce interval $[-1, 1]$, při hledání lokálních extrémů má smysl uvažovat pouze body z intervalu $(-1, 1)$.

(b) Pojem lokálního extrému je *lokální* v tom smyslu, že okolí, na kterém má platit nerovnost z Definice 7.28 není přesně dáno – může být jakkoliv malé. Funkce může mít více lokálních maxim (resp. minim), např. funkce cos má nekonečné množství bodů lokálních maxim (jsou to právě body $x_0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) i bodů lokálních minim (body $x_0 = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Zajímavé je vyšetření lokálních extrémů funkce $f(x) = \sin 1/x$ – pokuste se najít všechny body lokálních extrémů.

Při vyšetřování lokálních extrémů je zásadní následující věta.

Věta 7.30 (Fermatova – nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Nechť funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$ *lokální extrém a existuje* $f'(x_0)$. *Pak* $f'(x_0) = 0$.

Důkaz. Je-li x_0 bodem lokálního extrému funkce f, pak $f(x_0)$ je největší nebo nejmenší funkční hodnota funkce $f|_{\mathcal{U}(x_0)}$, kde $\mathcal{U}(x_0)$ je okolí z Definice 7.28. Tvrzení pak plyne z Věty 6.29. □

Poznámka 7.31 Z Věty 7.30 plyne, že má-li f v x_0 nenulovou derivaci, pak f nemá v x_0 lokální extrém. Tedy jediné body z vnitřku definičního oboru funkce f jsou body, ve kterých derivace neexistuje nebo je nulová.

Definice 7.32 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě x_0 nulovou derivaci. Bod x_0 se nazývá *stacionární bod funkce* f.

Poznámka 7.33 Věta 7.30 tedy říká, že bod lokálního extrému dané funkce, ve kterém má tato funkce derivaci, je stacionárním bodem – naopak to neplatí, např. $f(x) = x^3$ nemá v $x_0 = 0$ lokální extrém, přitom x_0 je stacionární bod f.

Věta 7.34 (postačující podmínky existence lokálních extrémů)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá v* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a má derivaci na* $\mathcal{R}_\delta(x_0)$. *Platí*

(a) *je-li* $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ *a* $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$, *pak* f *má v* x_0 *ostré lokální maximum,*

(b) *je-li* $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ *a* $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$, *pak* f *má v* x_0 *ostré lokální minimum.*

Důkaz. Dokážeme pouze případ (a). Z předpokladu existence vlastní derivace v každém bodě množiny $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ a spojitosti v x_0 plyne spojitost funkce f na $\mathcal{U}_\delta(x_0)$. Dále z předpokladů pak podle Věty 7.22 plyne, že f je rostoucí na $\mathcal{U}_\delta^-(x_0)$ a f je klesající na $\mathcal{U}_\delta^+(x_0)$. Speciálně

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0) \ : \ f(x) < f(x_0) \quad \text{a} \quad \forall x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0) \ : \ f(x_0) > f(x),$$

takže $f(x) < f(x_0)$ pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$. □

Věta 7.35. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má ve stacionárním bodě* x_0 *(vlastní nebo nevlastní) nenulovou druhou derivaci. Pak* f *má v bodě* x_0 *ostrý lokální extrém, a to*

(a) *maximum, je-li* $f''(x_0) < 0$ *nebo*

(b) *minimum, je-li* $f''(x_0) > 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $f''(x_0) > 0$. Pak podle Věty 5.31 existuje okolí $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Tedy pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ platí $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ platí $f'(x) < 0$. Jsou tedy splněny předpoklady (a) Věty 7.34, podle níž má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

□

Příklad 7.36 Najděte body lokálních extrémů funkce

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$$

Řešení. (podle Věty 7.34): Platí

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12,$$

takže $f'(x) > 0$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ a $f'(x) < 0$ právě tehdy, když $x \in (-1, 2)$. Ze spojitosti f v bodech -1 a 2 a Věty 7.34 plyne, že f má v $x = -1$ ostré lokální maximum a v $x = 2$ ostré lokální minimum.
(podle Věty 7.35): Platí opět

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12,$$

tedy $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $x = -1$ nebo $x = 2$. Našli jsme stacionární body funkce f. Ověříme, zda v nich funkce nabývá lokálních extrémů. Platí

$$f''(x) = 12x - 6,$$

takže $f''(-1) < 0$, $f''(2) > 0$. Podle Věty 7.35 dostáváme stejný výsledek jako předchozím postupem. ○

Poznámka 7.37 Výhoda použití Věty 7.34 oproti Větě 7.35 spočívá v tom, že lokální extrém určíme i v bodech, ve kterých neexistuje derivace a navíc ani nemusíme počítat druhou derivaci. Problém s použitím Věty 7.35 také nastane, pokud je i druhá derivace ve stacionárním bodě nulová. Toto částečně řeší následující věta.

Věta 7.38. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v x_0 (vlastní nebo nevlastní) derivaci řádu n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Pak platí

(a) je-li n sudé, funkce f má v x_0 ostrý lokální extrém, a to

- *je-li $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak jde o ostré lokální minimum,*
- *je-li $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak jde o ostré lokální maximum,*

(b) je-li n liché, funkce f nemá v x_0 lokální extrém.

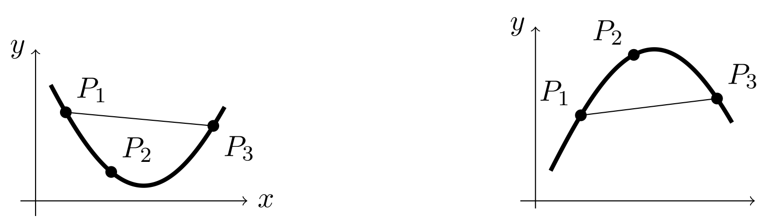
7.2.3 Funkce konvexní a konkávní

Konvexnost a konkávnost funkce nám podává jemnější informaci o vývoji funkční hodnot než je monotónnost.

Definice 7.39 Řekneme, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *na intervalu* $I \subset \mathcal{D}(f)$ *konvexní* (resp. *konkávní*), jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ leží pod (resp. nad) spojnicí bodů $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_3 = (x_3, f(x_3))$ nebo na ní. Platí-li, že P_2 leží pod (resp. nad) spojnicí bodů P_1, a P_3, pak se f nazývá *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) *na* I.

Poznámka 7.40

(i) Definice konkávní a konvexní funkce je velmi popisná. Vyjadřuje jakousi „vypouklost“ grafu funkce. Z něj snadno poznáme, zda je funkce konvexní, konkávní či ani jedno. Na Obrázku 7.4 jsou zobrazeny grafy konvexních, konkávních funkcí. Na Obrázku 7.5

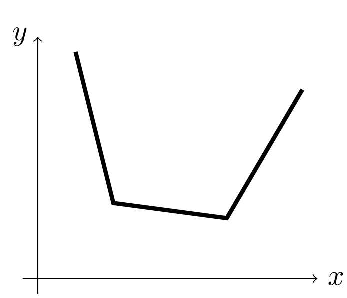


(a) Graf ryze konvexní funkce. (b) Graf ryze konkávní funkce.

Obrázek 7.4: Konvexní a konkávní funkce

můžeme vidět příklad grafu funkce, která je sice konvexní, ale není ryze konvexní.

(ii) Je-li f konvexní (resp. ryze konvexní), pak funkce $-f$ je konkávní (resp. ryze konkávní). Z toho plyne, že se při vyšetřování funkcí stačí omezit na konvexnost, protože konkávnost je duální vlastnost.



Obrázek 7.5: Graf konvexní funkce, která není ryze konvexní.

Lemma 7.41. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}(f)$ je interval. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je ryze konvexní na I,

(ii) pro každé $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

(iii) pro každé $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

(iv) pro každé $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Důkaz. Mějme tři libovolné body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Pak s využitím značení z Definice 7.39, přímka procházející body P_1 a P_3 má rovnici

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_3)$$

a podmínka, že P_2 leží pod touto přímkou je splněna právě tehdy, když platí nerovnost

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_3).$$

Jednoduchým cvičením je ověření, že poslední nerovnost se dá upravit na kteroukoliv z nerovností z tvrzení (ii), (iii) a (iv). □

Poznámka 7.42

(a) Nerovnosti v Lemmatu 7.41 mají jednoduchý geometrický význam. Stačí si uvědomit, že diferenční podíl

$$\frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

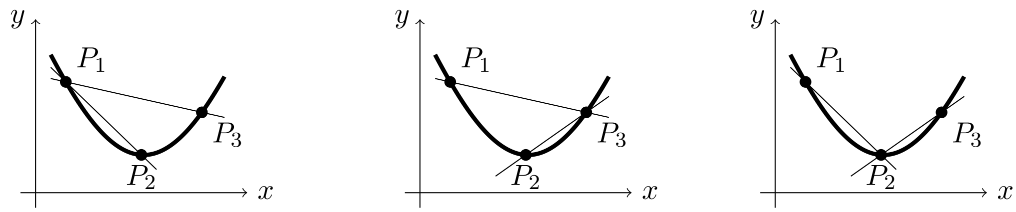
je směrnice přímky procházející body

$$P_i = (x_i, f(x_i)) \quad \text{a} \quad P_j = (x_j, f(x_j)),$$

pro $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, viz Obrázek 7.6.

(b) Pro ryzí konkávnost platí podobné tvrzení jako Lemma 7.41 – ovšem s opačnými nerovnostmi. A také pro konvexnost i konkávnost – nerovnosti jsou pak neostré.

Konvexnost/konkávnost diferencovatelných funkcí lze pěkně charakterizovat pomocí tečny ke grafu a monotónnosti první derivace.



(a) Podmínka (ii). (b) Podmínka (iii). (c) Podmínka (iv).

Obrázek 7.6: Geometrický význam nerovností z Lemmatu 7.41.

Věta 7.43. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na intervalu $I \subset \mathcal{D}(f)$ derivaci. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(a) f je na I ryze konvexní,

(b) pro každé $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$ platí nerovnost

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

(c) f' je rostoucí na I.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Podmínka (b) je ekvivalentní s touto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) \quad \forall x \in I,\ x > x_0 \quad \text{a} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) \quad \forall x \in I,\ x < x_0. \tag{7.3}$$

Definujme pomocnou funkci

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & \text{pro } x \in I,\ x \neq x_0, \\ f'(x_0), & \text{pro } x = x_0. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá na I. Dokažme, že je také na I rostoucí – tím dokážeme (7.3) a tedy i (b). Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_0 < x_1 < x_2$. Pak z podmínky (iii) Lemmatu 7.41 dostáváme

$$g(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = g(x_2),$$

tedy g je rostoucí na intervalu $I \cap (x_0, \infty)$. Podobně, nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 < x_0$. Pak z podmínky (iii) Lemmatu 7.41 dostáváme

$$g(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = g(x_2),$$

tedy g je rostoucí na intervalu $I \cap (-\infty, x_0)$. Protože g je v bodě x_0 spojitá, dostáváme s využitím výsledků Cvičení 7.23, že g je rostoucí na celém I.
(b) $\Rightarrow$ (c): Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Z podmínky (b) plyne, že platí následující dvě nerovnosti (dosadíme za x_0 a x nejprve x_1 a x_2 a pak naopak)

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

a
$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Sečtením těchto dvou nerovností dostáváme

$$f(x_2) + f(x_1) > f(x_1) + f(x_2) + (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1),$$

což je ekvivalentní s
$$0 > (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1).$$

Tím dostáváme, že $f'(x_1) < f'(x_2)$. Funkce f' je rostoucí na I.
(c) $\Rightarrow$ (a): Stačí dokázat platnost výroku (ii) z Lemmatu 7.41. Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ libovolně. Uvažujme pomocnou funkci

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad x \in I,\ x > x_1.$$

Dokažme, že g je rostoucí. Nechť $x \in I$, $x > x_1$ je libovolné. Pak f splňuje na intervalu $[x_1, x]$ předpoklady Lagrangeovy věty, podle níž pak existuje $\xi \in (x_1, x)$ takové, že

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1).$$

Proto platí

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))}{(x - x_1)^2} = \frac{f'(x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)}{(x - x_1)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - x_1} > 0,$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že $\xi < x$ a f' je rostoucí. Z Věty 7.22 plyne, že funkce g je rostoucí na intervalu $I \cap (x_1, \infty)$. Protože $x_2, x_3 \in I \cap (x_1, \infty)$ a $x_2 < x_3$, dostáváme

$$g(x_2) < g(x_3),$$

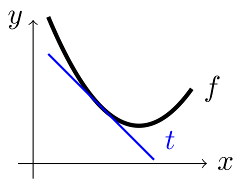
jinými slovy
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Ekvivalence pak vyplývá z opakovaného využití tranzitivity implikace (viz *hypotetický sylogismus* z Tabulky 1.8). □

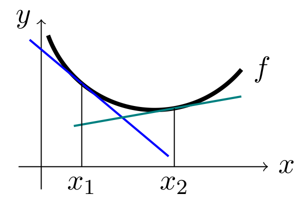
Poznámka 7.44

(a) Podívejme se na geometrický význam tvrzení z Věty 7.43. Podmínka (b) vlastně znamená, že tečna ke grafu ryze konvexní funkce leží pod jejím grafem (a má s ním společný jen ten bod dotyku), viz Obrázek 7.7(a). Podmínka (c) je také dobře pochopitelná. Říká, že pro ryze konvexní funkci f na intervalu I a body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ platí že $f'(x_1) < f'(x_2)$, tedy, že s rostoucím x se směrnice tečen ke grafu funkce f v bodech $(x, f(x))$ zvětšují – viz Obrázek 7.7(b). To se dá chápat tak, že se rychlost změny funkčních hodnot zvětšuje.

(b) Opět lze vyslovit duální tvrzení k Větě 7.43 i pro ryze konkávní funkci (v (b) se změní nerovnost v opačnou a v (c) se rostoucí zamění za klesající). A dokonce lze podobné tvrzení říct i pro konvexní a konkávní funkci (nerovnost v (b) je pak neostrá a v (c) je f' pouze monotónní, nikoliv ryze monotónní).



(a) „Graf nad tečnou“.



(b) Rostoucí směrnice tečen.

Obrázek 7.7: Ekvivalentní podmínky ryzí konvexnosti

Věta 7.45. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má druhou derivaci na intervalu $I \subset \mathcal{D}(f)$. Pak*

(a) f je ryze konvexní na I, je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$,

(b) f je ryze konkávní na I, je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$.

Důkaz. Z předpokladů a Věty 7.22 plyne, že f' je rostoucí na I. Z Věty 7.43 přímo plyne, že f je ryze konvexní na I. □

Příklad 7.46 Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce

$$f(x) = x^3 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Platí $f'(x) = 3x^2 - 2x$, $f''(x) = 6x - 2$. Pak

$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{3}, \qquad f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{3},$$

tzn. f je ryze konvexní na intervalu $(\frac{1}{3}, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-\infty, \frac{1}{3})$. ○

Definice 7.47 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že x_0 je *inflexní bod funkce f* (neboli *f má v bodě x_0 inflexi*), jestliže platí

(i) existuje $f'(x_0)$,

(ii) existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ tak, že

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0) &: \ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{a} \\ \forall x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0) &: \ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \end{aligned}$$

nebo naopak

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0) &: \ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{a} \\ \forall x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0) &: \ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Poznámka 7.48 Podmínka (ii) v definice inflexního bodu vypadá poněkud složitě. Má ovšem velmi jednoduchý geometrický význam. Např. výrok

$$\exists \mathcal{R}_\delta(x_0) \ \forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0) \ : \ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

říká, že graf funkce na nějakém levém okolí bodu x_0 leží *pod* tečnou ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Věta 7.49. *(nutná podmínka existence inflexe) Nechť x_0 je inflexní bod funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.*

Důkaz. (sporem) Předpokládejme, že naopak $f''(x_0) \neq 0$. Uvažujme případ $f''(x_0) > 0$ (případ $f''(x_0) < 0$ se provede podobně). Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

a odtud existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Odtud plyne, že je-li $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$, pak $x - x_0 > 0$ a také $f'(x) - f'(x_0) > 0$ a podobně je-li $x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$, pak $x - x_0 < 0$ a také $f'(x) - f'(x_0) < 0$. Tedy

$$\left.\begin{array}{l} \text{je-li } x, y \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0), \text{ pak } (f'(y) - f'(x_0))(x - x_0) > 0, \\ \text{je-li } x, y \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0), \text{ pak } (f'(y) - f'(x_0))(x - x_0) > 0. \end{array}\right\} \tag{7.4}$$

Z předpokladů vyplývá spojitost funkce f na celém $\mathcal{U}_\delta(x_0)$. Uvažujme libovolné $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$. Funkce f proto splňuje na intervalu s krajními body x_0, x předpoklady Lagrangeovy věty, tudíž existuje mezi těmito body $\xi \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ takové, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} f(x) - [f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)] &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) > 0, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne z (7.4) a faktu, že je-li $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$, je také $\xi \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ a podobně, je-li $x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ je také $\xi \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$. Platí tedy pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ a pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ nerovnost

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

která je ve sporu s předpokladem, že x_0 je inflexním bodem funkce f. □

Poznámka 7.50 Funkce f může mít inflexní body jen v nulových bodech f'' nebo bodech v nichž druhá derivace neexistuje. Je-li ale $f''(x_0) = 0$ neznamená to, že x_0 je inflexní bod f, např. $x_0 = 0$, $f(x) = x^4$. Všimněte si analogie s lokálními extrémy.

Věta 7.51 (postačující podmínka existence inflexe)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ druhou derivaci. Platí-li*

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0) : \ f''(x) > 0 \quad a \quad \forall x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0) : \ f''(x) < 0,$$

nebo

$$\forall x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0) : \ f''(x) < 0 \quad a \quad \forall x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0) : \ f''(x) > 0,$$

pak x_0 je inflexní bod funkce f.

Důkaz. V prvním případě je podle Věty 7.45 funkce f ryze konvexní na $\mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ a ryze konkávní na $\mathcal{R}_\delta^+(x_0)$. Tedy pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ platí

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ platí

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

tzn. x_0 je inflexní bod funkce f. □

Věta 7.52 (postačující podmínka existence inflexe)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě x_0 třetí derivaci. Je-li $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, pak x_0 je inflexní bod této funkce.*

Důkaz. Nechť $f''(x_0) = 0$ a pro určitost $f'''(x_0) > 0$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

tzn. existuje $\mathcal{R}_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{R}_\delta(x_0)$ platí

$$\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0.$$

Pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta^+(x_0)$ platí $f''(x) > 0$ a pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta^-(x_0)$ platí $f''(x) < 0$. Z Věty 7.51 plyne, že x_0 je inflexní bod funkce f. □

Příklad 7.53 Najděte inflexní body funkce

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 4.$$

Řešení. (podle Věty 7.51): Platí

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 1, \quad f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1).$$

Druhá derivace je tedy kladná na intervalech $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ a záporná na intervalu $(-1, 1)$. Ke změně znaménka druhé derivace dochází v bodech -1 a 1, tzn. podle Věty 7.51 jde o inflexní body.
(podle Věty 7.52): Platí $f'''(x) = 24x$, tedy $f'''(-1) = -24 \neq 0$ a $f'''(1) = 24 \neq 0$. Podle Věty 7.52 jsou body -1 a 1 inflexními body funkce f. ○

Věta 7.54. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v x_0 vlastní nebo nevlastní derivaci řádu n, $n \in \mathbb{N}$. Nechť*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Pak platí

(i) je-li n sudé a

(a) je-li $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak f je v x_0 ryze konvexní,

(b) je-li $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak f je v x_0 ryze konkávní,

(ii) je-li n liché, pak f má v x_0 inflexi.

7.2.4 Asymptoty

Také nás zajímá chování funkcí v hraničních bodech definičního oboru. Konkrétně nás zajímá, jestli se v takových bodech graf funkce nechová téměř lineárně – tedy zda graf funkce v redukovaném okolí hraničních bodů definičního oboru téměř splývá s nějakou přímkou – budeme jí říkat asymptota.

Definice 7.55 Má-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ jednu z jednostranných limit nevlastní, pak přímku v rovnici $x = x_0$ nazýváme *vertikální asymptotou funkce* f.

Příklad 7.56 Funkce ln má vertikální asymptotu o rovnici $x = 0$ (osa y). Dále funkce tg má dokonce nekonečné množství vertikálních asymptot: mají rovnice $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definice 7.57 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na intervalu (a, ∞), kde $a \in \mathbb{R}$ (resp. $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$). Přímku o rovnici $y = kx + q$ nazývváme *asymptotou (se směrnicí) funkce* f *v bodě* ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0\right).$$

Věta 7.58. *Přímka o rovnici $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$) právě tehdy, když existují vlastní limity*

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx],$$
$$\left(\textit{resp. } k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx]\right).$$

Důkaz. Nechť přímka o rovnice $y = kx+q$ je asymptotou funkce f v bodě ∞, kde $k, q \in \mathbb{R}$, tzn.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0,$$

Pak i

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}[f(x) - (kx+q)] = 0,$$

tedy

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x}\right] = 0.$$

Odtud plyne

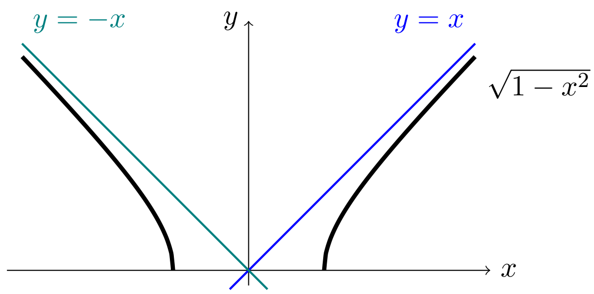
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k.$$

Z rovnosti

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+q)] = 0,$$

plyne také

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = q.$$



Obrázek 7.8: Graf funkce $\sqrt{x^2-1}$ se svými asymptotami.

Nechť naopak existují vlastní limity

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

Pak

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [(f(x) - kx) - q] = q - q = 0,$$

tzn. $y = kx + q$ je rovnice asymptoty funkce f v bodě ∞. □

Poznámka 7.59 Pokud některá z limit z Věty 7.58 neexistuje nebo je nevlastní, pak asymptota neexistuje.

Příklad 7.60 Určete asymptoty (pokud existují) funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2-1}$$

v bodech $\pm\infty$.

Řešení. Funkce f je definována na množině $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Má tedy smysl pokoušet se vyšetřit obě asymptoty se směrnicí pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$. Platí

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 1,$$

a

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.$$

Tedy asymptota v bodě ∞ existuje a je dána rovnicí $y = x$. Dále platí

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = -1,$$

a

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0.$$

Tedy asymptota v bodě $-\infty$ existuje a je dána rovnicí $y = -x$. Graf funkce s asymptotami lze vidět na Obrázku 7.8. ○

Příklad 7.61 Vyšetřete asymptoty funkce x^2.

Řešení. Tato funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a má proto smysl se ptát po asymptotách se směrnicí pro $x \to \pm\infty$. Dostáváme

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$$

a rovněž

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty.$$

Funkce nemá žádnou asymptotu se směrnicí. ○

Příklad 7.62 Vyšetřete asymptoty funkce ln.

Řešení. Tato funkce je definována na $(0, \infty)$ a má proto smysl se ptát po vertikální asymptotě (která existuje a má rovnici $x = 0$) a asymptotě se směrnicí pro $x \to \infty$. Dostáváme

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \in \mathbb{R},$$

což vypadá nadějně, ovšem

$$q = \lim_{x\to\infty} (\ln x - 0 \cdot x) = \infty.$$

Funkce nemá žádnou asymptotu se směrnicí. ○

Věta 7.63. *Nechť pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existuje vlastní limita*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \tilde{q} \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \tilde{q}\right).$$

Pak $y = \tilde{q}$ je rovnice asymptoty funkce f pro $x \to \infty$ (resp. $x \to -\infty$).

Důkaz. Podle Věty 7.58 stačí vypočítat limity

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\tilde{q}}{\infty} = 0$$

a

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \tilde{q}.$$

Podle stejné věty je rovnice asymptoty $y = \tilde{q}$. □

7.2.5 Doporučený postup vyšetření průběhu funkce

V této chvíli už známe všechny důležité pojmy potřebné k tomu, abychom si udělali dobrou představu o průběhu funkce. Průběh funkce je doporučován provádět zhruba v následujícím pořadí:

1. $\mathcal{D}(f)$, parita a periodicita (tím si lze v dalším ušetřit práci),
2. spojitost f, body nespojitosti a jejich typ, limity v krajních bodech definičního oboru a následně i asymptoty se směrnicí a vertikální asymptoty,

3. f', $\mathcal{D}(f')$, podle znaménka f' určíme intervaly monotonie a následně i body lokálních extrémů (z Věty 7.34),
4. f'', $\mathcal{D}(f'')$, podle znaménka f'' určíme intervaly konvexity/konkávity a následně i body inflexe (z Věty 7.51),
5. funkční hodnoty ve význačných bodech (tzn. v bodech lok. extrémů a bodech inflexe – v těch i hodnoty první derivace),
6. načrtnutí grafu funkce f (popř. $\mathcal{H}(f)$).

Příklad 7.64 Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

Řešení. (1): $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Bod $x = 0$ je jediný nulový bod funkce. Protože $\mathcal{D}(f)$ je symetrická množina vzhledem k nule, má smysl ptát se na paritu funkce. Platí

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{x^2}{x^2-1} = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tedy funkce f je sudá. Není lichá ani periodická.
(2): Funkce je spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$. Funkce má nespojitosti v bodech $x = -1$ a $x = 1$. Platí

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty,$$

a přímo ze sudosti funkce lze určit, že

$$\lim_{x\to -1-} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to -1+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty.$$

Tedy funkce f má v bodech $x = 1$, $x = -1$ nespojitosti druhého druhu. Navíc z hodnot limit plyne, že funkce f má vertikální asymptoty $x = -1$, $x = 1$.
(3): Platí

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2},$$

$\mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)$. Určíme, na jaké množině je funkce rostoucí, tj. řešíme nerovnici $f'(x) > 0$, což je

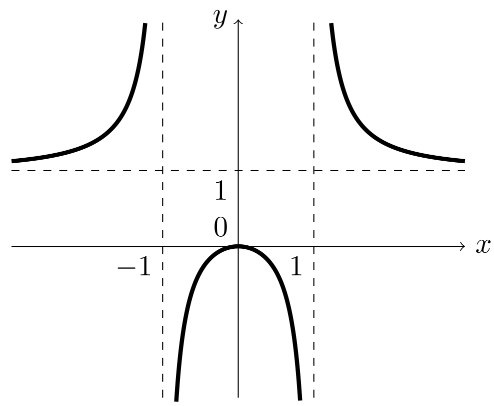
$$\frac{2x}{(x^2-1)^2} < 0.$$

Tato nerovnice je ekvivalentní s

$$x < 0 \ \wedge x \neq -1.$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,0)$, klesající na $(0,1)$ a $(1,\infty)$ (všimněme si, že intervaly monotónnosti a jejich typ souhlasí se sudostí funkce). V bodě $x = 0$ je funkce spojitá tedy nabývá v něm ostrého lokálního maxima, $f(0) = 0$.
(4): Platí

$$f''(x) = 2\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$$



Obrázek 7.9: Graf funkce $\frac{x^2}{x^2-1}$.

a zřejmě $D(f'') = D(f)$. Určíme na jaké množině je funkce konvexní, tj. řešíme nerovnici $f''(x) > 0$, což je

$$2\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} > 0.$$

To je ekvivalentní s

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} > 0,$$

což se dá zjednodušit na

$$x^2 - 1 > 0$$

neboli

$$|x| > 1.$$

Funkce je tedy konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a snadno se přesvědčíme, že je konkávní na intervalu $(-1, 1)$. Funkce nemá inflexní body (jediné možné inflexní body – vzhledem k nenulovosti druhé derivace – by byly $x = 1$ a $x = -1$ – v těch ovšem funkce není definovaná).

(5): Hledáme asymptotu pro $x \to \infty$. Pokud existuje asymptota o rovnici $y = kx + q$, pak

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

a

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1.$$

Tedy $y = 1$ je rovnice asymptoty funkce pro $x \to \infty$. Ze sudosti funkce plyne, že $y = 1$ je rovnice asymptoty funkce i pro $x \to -\infty$. Z těchto údajů již můžeme snadno načrtnout graf funkce – viz Obrázek 7.9. ◯

7.3 Globální (absolutní) extrémy

Častou úlohou bývá vyšetření největší resp. nejmenší funkční hodnoty funkce na nějaké množině – takovým hodnotám říkáme *globální extrémy*.

Definice 7.65 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq M \subset \mathcal{D}(f)$. Jestliže existuje $x_0 \in M$ tak, že

$$f(x_0) = \max\{f(x) \, : \, x \in M\} \quad (f(x_0) = \min\{f(x) \, : \, x \in M\}),$$

říkáme, že f nabývá v x_0 *globálního maxima (minima) na množině* M. Souhrnně hovoříme o *globálních extrémech funkce* f *na* M.

Věta 7.66. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $[a, b]$. *Pak* f *nabývá na* $[a, b]$ *globálního extrému a to buď v bodech lokálního extrému nebo v krajních bodech intervalu* $[a, b]$.

Důkaz. Podle Věty 5.82 nabývá funkce obou globálních extrémů na intervalu $[a, b]$. Nechť f nabývá v $x_0 \in [a, b]$ globálního maxima. Zřejmě pak buď $x_0 = a$, $x_0 = b$ nebo $x_0 \in (a, b)$. Kdyby $x_0 \in (a, b)$, pak s ohledem na Definici 7.28 jde o bod lokálního maxima. Podobně lze argumentovat pro globální minimum. □

Poznámka 7.67 Má-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (spojitá na intervalu $[a, b]$) navíc derivaci na (a, b), pak může svých globálních extrémů nabýt pouze v bodech $x = a$, $x = b$ nebo ve stacionárních bodech. Z toho plyne postup při hledání globálních extrémů funkcí majících derivaci: Vypočteme funkční hodnoty funkce f v bodech $x = a$, $x = b$ a ve stacionárních bodech. Pak určíme jejich největší a nejmenší hodnotu – to jsou globální extrémy.

Příklad 7.68 Z čtvercového kartonu o délce strany 18 cm jsou v rozích vyříznuty čtverce a ze zbytku je sestrojena krabice ve tvaru hranolu. Jak velká musí být strana vyřezaných čtverců, aby objem vzniklé krabice byl maximální?

Řešení. Nechť x je délka jednoho z vyřezaných čtverců (všechny tyto vyřezané čtverce jsou samozřejmě stejně velké). Pak snadno spočítáme, že objem příslušného hranolu bude roven číslu

$$x(18 - 2x)(18 - 2x) = x(18 - 2x)^2$$

přičemž pro x platí $0 < x < 9$. Definujeme funkci f předpisem $f(x) = x(18 - 2x)^2$ na intervalu $[0, 9]$ a budeme hledat její největší hodnotu (uzavřený interval bereme proto, že podle Věty 7.66 globální maximum určitě existuje). Nepřekvapí nás, že $f(0) = 0$, $f(9) = 0$. Dále

$$f'(x) = 12(9 - x)(3 - x).$$

Dostáváme stacionární bod $x = 3$, $f(3) = 432$.
Závěr: Vystřihneme-li čtverce o délce stran 3 cm, dosáhneme maximálního objemu 432 cm^3.

◯

Kapitola 8

Primitivní funkce

V předchozích kapitolách jsme se kromě jiného dozvěděli, jak k zadané funkci určit její derivaci. Uvažujme opačnou úlohu: *Najděte funkci, jejíž derivace je zadaná funkce.* Například, je-li zadaná funkce

$$f(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R},$$

snadno uhodneme, že hledanou funkcí je

$$F(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

protože $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Všimněme si, že řešení naší úlohy není jediné. Je jím také každá funkce

$$F_C(x) = x^2 + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde C je libovolné reálné číslo.

Než půjdeme dál, zdůrazněme, že určení funkce F není jen taková matematická hříčka. Tato úloha se ukáže jako naprosto klíčová pro efektivní řešení praktických úloh, zejména určování obsahů rovinných obrazců či objemů těles. Pomocí ní budeme schopni spočítat přesný obsah různých rovinných obrazců s „křivou hranicí“, např. budeme schopni odvodit vzorec pro obsah kruhu.

Tato úloha je tak důležitá, že pro její řešení máme název: *primitivní funkce.*

8.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 8.1 Nechť $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce F je *primitivní k f na intervalu I*, jestliže

$$\forall x \in I \,:\; F'(x) = f(x).$$

Poznámka 8.2

(a) Je-li x krajním bodem intervalu I patřící do tohoto intervalu, pak výrazem $F'(x)$ se v Definici 8.1 rozumí příslušná jednostranná derivace.

(b) Z Definice 8.1 okamžitě plyne, že primitivní funkce má derivaci a je tedy *spojitá* (na příslušném intervalu).

(c) Z Definice 8.1 také plyne, že je-li F primitivní k f na intervalu I, je F primitivní k f také na každém podintervalu intervalu I (proč?).

(d) Uvědomme si, že „funkce F je primitivní k funkci f na intervalu I“ říká to samé co výrok „funkce f je derivací funkce F na intervalu I“.

Po zavedení pojmu primitivní funkce ihned vznikne několik otázek:

- Existuje pro každou funkci na libovolném intervalu primitivní funkce?
- Pokud existuje, kolik jich je, a jak vypadají (jak je určíme)?

V následujícím příkladu odpovíme na první otázku záporně.

Příklad 8.3 Funkce sgn nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci (přesněji: na žádném intervalu, který obsahuje nulu). Dokažte!

Řešení. Neexistence primitivní funkce vlastně plyne z Věty 6.39 a faktu, že sgn není darbouxovská. Pokud bychom Darbouxovu větu neznali, můžeme provést důkaz sporem: Předpokládejme naopak, že $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je primitivní funkce k sgn na $\mathbb{R}$, tzn.

$$F'(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

takže $F'(x) = 1$ pro $x > 0$ a $F'(0) = 0$. Podle Poznámky 8.2(b) je F spojitá na celém $\mathbb{R}$. Také proto funkce F splňuje předpoklady Lagrangeovy věty na intervalu $[0, x]$ pro libovolné $x > 0$. Tedy pro $x > 0$ existuje $\xi(x) \in (0, x)$ (tzn. $\xi(x) > 0$) tak, že

$$F(x) - F(0) = F'(\xi(x))(x - 0) = 1 \cdot x = x.$$

Pak

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1.$$

To je ale ve sporu s tím, že $F'_+(0) = F'(0) = 0$. ○

Poznámka 8.4 Jak se dozvíme v kapitole 9 (Věta 9.52), *každá funkce má primitivní funkci na každém intervalu, na kterém je spojitá*. Není proto náhodou, že neexistenci primitivní funkce k funkci sgn jsme dokázali především kvůli její nespojitosti v bodě 0. To ale neznamená, že nespojitá funkce nemůže mít primitivní funkci.

Příklad 8.5 Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Pak pro $x \neq 0$ platí

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

a

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Odtud vidíme, že funkce F je primitivní k

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$. Přitom f *není spojitá v bodě* 0 (ověřte!). ○

Co se týče otázky množství primitivních funkcí, odpověď nám dává následující věta.

Věta 8.6.

(a) *Nechť F je primitivní k f na intervalu I, $C \in \mathbb{R}$. Pak funkce $F + C$ je také primitivní k f na I.*

(b) *Jsou-li F, G primitivní k f na intervalu I, pak $F - G$ je konstantní na I, neboli*

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \;:\; F(x) = G(x) + C.$$

Důkaz. ad (a): Uvažujme primitivní funkci F k f na intervalu I a $C \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo. Pak platí

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

tzn. $F + C$ je primitivní k f na I.
ad (b): Uvažujme dvě funkce F, G, které jsou primitivní k f na intervalu I. Označme $H = F - G$. Pak

$$H'(x) = (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Dokažme, že H je konstantní na I. Nechť $x, \tilde{x} \in I$, $x < \tilde{x}$ jsou libovolné. Protože H splňuje na intervalu $[x, \tilde{x}]$ předpoklady Lagrangeovy věty, pak podle ní existuje $\xi \in (x, \tilde{x})$ tak, že

$$H(x') - H(x) = H'(\xi)(\tilde{x} - x) = 0,$$

kde jsme využili faktu, že H má na I nulovou derivaci. Tedy $H(x) = H(\tilde{x})$ pro libovolnou dvojici bodů $x, \tilde{x} \in I$, což znamená, že H je konstantní funkce na I. □

Odtud dostáváme téměř úplnou odpověď na otázku množství primitivních funkcí a jejich předpisu.

Důsledek 8.7. *Má-li funkce f na intervalu I primitivní funkci F, pak každá další primitivní funkce k f na I má předpis*

$$F_C(x) = F(x) + C, \quad x \in I,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ (říkáme, že libovolné dvě primitivní funkce k téže funkci na tomtéž intervalu jsou stejné až na aditivní konstantu*).*

Vzhledem k Důsledku 8.7 má daná funkce na daném intervalu nekonečné množství primitivních funkcí (a nebo nemá žádnou primitivní funkci). Pro množinu všech primitivních funkcí máme název: *neurčitý integrál.*

Poznámka 8.8

(a) V důkazu Věty 8.6(b) jsme potřebovali, aby I byl interval. Tento předpoklad nelze vynechat. Uvažujme množinu $I = (0, 1) \cup (1, 2)$ (nejde o interval) a dvě funkce na této množině definované:

$$F(x) = 0, \quad x \in I, \quad G(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

Vidíme, že $F'(x) = G'(x) = 0$ pro všechna $x \in I$. Vidíme, že obě funkce mají stejnou derivaci (tedy F a G jsou primitivní k nulové funkci na obou intervalech $(0,1)$ a $(1,2)$). Jejich rozdíl ale není konstantní funkce! Z toho důvodu primitivní funkce definujeme pouze na **intervalech**.

(b) Z Důsledku 8.7 plyne, že množina primitivních funkcí k f na I je buď prázdná nebo nekonečná. V druhém případě jde pak o množinu

$$\{F_C \; ; \; C \in \mathbb{R}\},$$

nazýváme ji *neurčitým integrálem funkce* f a značíme ji

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Protože neurčitý integrál je množina funkcí lišících se o aditivní konstantu, známe-li jednu z primitivních funkcí (kteroukoliv) známe pak i celý neurčitý integrál. Proto se pro jednoduchost zápisu vžilo stejným symbolem označovat také jednu z primitivních funkcí. Ještě jednou: symbol

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

budeme používat pro označení *jedné z primitivních funkcí* k funkci f na daném intervalu.

(d) Předpis primitivní funkce stačí určovat pouze na otevřeném intervalu. Totiž, je-li například funkce F primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu (a,b) a víme, že funkce f má primitivní funkci dokonce na celém intervalu $[a,b]$, pak vzhledem k Poznámce 8.2(b) musí být tato primitivní funkce spojitá na celém $[a,b]$. Odtud plyne, že funkce

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pro } x \in (a,b), \\ \lim\limits_{x\to a+} F(x) & \text{pro } x = a, \\ \lim\limits_{x\to b-} F(x) & \text{pro } x = b \end{cases}$$

je primitivní k f na $[a,b]$. Stručně řečeno, najdeme-li předpis primitivní funkce pouze na otevřeném intervalu (a,b) (a víme, že tato existuje na celém $[a,b]$), stačí ji *spojitě* dodefinovat na $[a,b]$.

(e) Procesu hledání primitivní funkce říkáme *integrace*.

8.2 Základní metody integrace

Jak ke konkrétní funkci na konkrétním intervalu nalézt primitivní funkci? Není to už tak jednoduché jako nalézt derivaci funkce. Jde vlastně o inverzní proces k derivování. Naši cestu k hledání primitivních funkcí rozdělíme do několika fází. Postupně si ukážeme jak integrovat

- některé elementární funkce,
- součet, rozdíl funkcí a násobek funkce a konstanty,

- součin funkcí,
- složenou funkci.

Bohužel na poslední dva případy nebudeme mít k dispozici tak jednoduché postupy jako tomu bylo u derivování.

Nejprve nalezněme primitivní funkce k vybraným elementárním funkcím – to provedeme s pomocí vzorců pro derivování. V následující příkladech ukážeme pár odvození.

Příklad 8.9 Nalezněte všechny primitivní funkce k nulové funkci na intervalu $\mathbb{R}$.

Řešení. Víme, že

$$(0)' = 0.$$

Podle Důsledku 8.7 platí

$$\int 0 \, \mathrm{d}x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

○

Příklad 8.10 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

na $\mathbb{R}$.

Řešení. Z tabulky derivací elementárních funkcí snadno zjistíme

$$(x)' = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Proto podle Důsledku 8.7 dostáváme

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že místo $\int 1 \, \mathrm{d}x$ se často zkráceně píše jen $\int \, \mathrm{d}x$. ○

Příklad 8.11 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Zřejmě platí

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a snadno uhádneme, že

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podle Důsledku 8.7 tedy platí

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

○

Příklad 8.12 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$x^{\alpha}, \quad x \in (0, \infty),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Inspirováni Příkladem 8.11 snadno uhádneme, že

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha},$$

pro každé $x > 0$ a $\alpha \neq -1$. Pro některé hodnoty parametru α je interval, na kterém dostáváme primitivní funkci širší, viz Poznámku 4.52(iv). Pro $\alpha \neq -1$ je

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

na každém intervalu, který je podmnožinou definičního oboru funkce x^{α}.
Podívejme se na případ $\alpha = -1$. Máme najít primitivní funkci k funkci $1/x$. Jelikož její definiční obor není interval, musíme hledat primitivní funkci k této funkci zvlášť na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$. Opět pohled do tabulky derivací elementárních funkcí nám prozradí, že

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Tedy podle Důsledku 8.7 máme

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

na intervalu $(0, \infty)$.
Teď se podíváme na primitivní funkci na intervalu $(-\infty, 0)$. Platí

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, 0),$$

tedy podle Věty 8.6 máme

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

na intervalu $(-\infty, 0)$.
Dohromady píšeme

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

a chápeme takto: *Funkce s předpisem* $\ln|x| + C$ *je primitivní k funkci* x^{-1} *na intervalech* $(-\infty, 0)$ *a* $(0, \infty)$. ◯

Příklad 8.13 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$a^{x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a > 0$ a $a \neq 1$.

Řešení. Z tabulky derivací elementárních funkcí snadno zjistíme, že

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Protože $\ln a$ je nenulová konstanta, pak

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud a z Důsledku 8.7 plyne, že

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\bigcirc$

Příklad 8.14 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Opět z tabulky derivací elementárních funkcí snadno zjistíme, že

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud

$$(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy podle Důsledku 8.7 platí

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Podobně určíme předpis primitivní funkce k funkci kosinus na $\mathbb{R}$. $\bigcirc$

Poznámka 8.15 Podobně můžeme odvodit či uhádnout předpisy primitivních funkcí k některým dalším elementárním funkcím (kontrolu lze provést pouhým zderivováním):

1. $\int 0 \, \mathrm{d}x = C$,
2. $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, pro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$,
3. $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$,
4. $\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$,
5. $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, pro $a > 0$, $a \neq 1$,
6. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$,
7. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$,
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$,
10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$,
12. $\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$,
13. $\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$,
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C$,
15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$,
16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$,
17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$,
18. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$,

19. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,$ je-li $a,b\in\mathbb{R}$, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$,

Jsou zde uvedeny předpisy primitivních funkcí na takových intervalech, na kterých jsou integrované funkce definované.

Pochopitelně se setkáme i s potřebou najít primitivní funkce k dalším funkcím. Potřebujeme k tomu znát další vlastnosti primitivních funkcí a metody jejich výpočtu. Jak uvidíme, najít primitivní funkci nebude tak přímočaré jako najít derivaci funkce.

Věta 8.16 (linearita integrace). *Nechť $f,g,F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, F, G jsou primitivní k f, g na intervalu I a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Pak $\alpha F+\beta G$ je primitivní k $\alpha f+\beta g$ na I, neboli*

$$\int (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Tvrzení věty snadno plyne z linearity derivace. Totiž, za uvedených předpokladů snadno pomocí Důsledku 6.21 dostáváme

$$(\alpha F(x)+\beta G(x))' = \alpha F'(x)+\beta G'(x) = \alpha f(x)+\beta g(x) \quad \text{pro všechna } x\in I,$$

tedy podle definice je $\alpha F+\beta G$ primitivní k $\alpha f+\beta g$ na I. □

Matematickou indukcí snadno dokážeme následující větu.

Věta 8.17. *Nechť $f_1,\dots,f_n,F_1,\dots,F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_1,\dots,F_n$ jsou po řadě primitivní k $f_1,\dots,f_n$ na intervalu I, $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Pak $c_1F_1+\ldots+c_nF_n$ je primitivní k $c_1f_1+\ldots+c_nf_n$ na I, neboli*

$$\int c_1f_1(x)+\ldots+c_nf_n(x)\,\mathrm{d}x = c_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\ldots+c_n\int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ukažme si její použití.

Příklad 8.18 Určete předpis funkce

$$\int (1+5x^2-3x^3)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Platí

$$\int (1+5x^2-3x^3)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + 5\int x^2\,\mathrm{d}x - 3\int x^3\,\mathrm{d}x = x+\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+C$$

na $\mathbb{R}$, $C\in\mathbb{R}$, kde jsme první rovnost dostali z Věty 8.17 a druhou rovnost z Poznámky 8.15 (vzorec číslo 2). ○

Jak je to s integrací součinu funkcí? Na výpočet primitivní funkce součinu dvou funkcí bohužel vzorec neexistuje. Můžeme si ale pomoci následující úvahou: Uvažujme dvě funkce $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mající na intervalu I derivace u', v'. Pak

$$(uv)' = u'v+uv' \quad \text{na } I,$$

tzn. uv je primitivní k funkci $u'v + uv'$, což můžeme zapsat jako (budeme vynechávat argumenty x)

$$uv = \int (u'v + uv')\,\mathrm{d}x.$$

Podle Věty 8.16 pak

$$uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$$

a tedy

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x.$$

Poslední rovnost říká, že rozdíl funkce uv a primitivní funkce k funkci $u'v$ je primitivní k funkci uv', říkáme jí *metoda integrace per partes (po částech)*. Zformulujme tento poznatek v následující větě.

Věta 8.19. *(integrace per partes) Nechť $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají na intervalu I derivace u', v'. Je-li $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivní k $u'v$ na I, pak $uv - F$ je primitivní k uv' na I, neboli*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Platí $(uv - F)' = u'v + uv' - F' = u'v + uv' - u'v = uv'$ na I. □

Podíváme-li se na tento „vzorec“, vidíme, že není úplně takový, jak bychom si přáli. Pouze převádí problém nalezení primitivní funkce k funkci uv' na problém nalezení primitivní funkce k funkci $u'v$. Pokud Větu 8.19 použijeme bez přemýšlení, můžeme naopak výpočet zhoršit (takzvaně z louže pod okap), viz Příklad 8.20(a).

Příklad 8.20 Vypočtěte

(a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int P_n(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int P_n(x)\cos x\,\mathrm{d}x$,

(d) $\displaystyle\int x^k \ln^n x\,\mathrm{d}x$,

(e) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$,

(f) $\displaystyle\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$,

(g) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$,

(h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$,

kde $k, n \in \mathbb{N}$, P_n je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Řešení. ad (a): Jde o nalezení primitivní funkce k funkci ve tvaru součinu. Metoda integrace per partes nám dává na výběr – jednu funkci položíme jako funkci u a druhou jako v'. Nevhodnou volbou můžeme situaci ještě zhoršit. Ukažme nejprve nevhodnou volbu: Zvolíme

$$u(x) = \mathrm{e}^x, \quad v'(x) = 1.$$

Pak $u'(x) = \mathrm{e}^x$ a např. $v(x) = x^2/2$ (nebo $v(x) = x^2/2 + C$, kde C je jakákoliv vhodná konstanta – my jsme vzali $C = 0$). Výpočet zapisujeme takto

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^x & u' = \mathrm{e}^x \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že teď máme integrovat něco ještě složitějšího – tato cesta nikam nevede! Ukažme nyní správnou volbu funkcí u a v':

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{bmatrix} = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Základ úspěchu spočíval v tom, že jsme u a v' volili tak, abychom již byli schopni primitivní funkci k $u'v$ určit, nebo alespoň abychom situaci zjednodušili.

ad (b): Úvaha je podobná jako v předchozím případě. Správná volba je taková, že budeme derivovat polynom P_n, protože bychom měli vědět, že derivace polynomu je polynom o jedničku nižšího stupně. Tedy

$$\begin{aligned} \int P_n(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = P_n(x) & u' = P_n'(x) =: P_{n-1}(x) \\ v' = \mathrm{e}^x & v = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} \\ &= P_n(x)\mathrm{e}^x - \int P_{n-1}(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

kde P_{n-1} je polynom stupně $n-1$. Stojíme tedy před podobným problémem, který také podobně vyřešíme – opět metodou per partes. Zvolíme $u = P_{n-1}$ a $v' = \mathrm{e}^x$. Tento postup opakujeme, až zderivujeme polynom na konstantu. V té chvíli stačí použít Větu 8.16 a vzorec 4 z Poznámky 8.15.

ad (c): Opět volíme metodu per partes. Derivovat budeme polynom, integrovat budeme kosinus, tzn. $u = P_n$, $v' = \cos$. Problém převedeme na úlohu hledání primitivní funkce

$$\int P_n'(x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

To zase řešíme metodou integrace per partes tak, abychom snižovali derivováním stupeň polynomu, tzn. derivujeme polynom, integrujeme sinus.

ad (d): Zde vidíme opět funkci ve tvaru součinu. Protože funkci $\ln^n x$ integrovat neumíme, budeme muset zvolit konfiguraci $u(x) = \ln^n x$ a $v'(x) = x^k$. Platí

$$\int x^k \ln^n x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln^n x & u' = \frac{n\ln^{n-1}x}{x} \\ v' = x^k & v = \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{vmatrix} = \frac{x^{k+1}\ln^n x}{k+1} - \frac{n}{k+1}\int x^k \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže $n = 1$, pak výpočet končíme použitím vzorce 2 z Poznámky 8.15. Pokud $n > 1$, opakujeme náš postup do té doby než snížíme mocninu logaritmu na nulu a můžeme použít vzorec 2 z Poznámky 8.15.

ad (e): Jde vlastně o funkci, jejíž funkční předpis bychom očekávali v základní tabulce vzorců. Bohužel není tak jednoduché předpis uhádnout. Úlohu vyřešíme metodou per partes. Naše úvaha spočívá v tom, že se na $\ln x$ můžeme dívat jako na součin $1 \cdot \ln x$. Máme tedy

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

ad (f): Pokud máme vyřešit tento příklad metodou integrace per partes, budeme muset volit za u funkci arctg, protože v opačném případě bychom museli zjistit její primitivní funkci, což v této chvíli neumíme. Nutně tedy

$$\begin{aligned} \int P_n(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = P_n(x) & v = \int P_n(x)\,\mathrm{d}x = P_{n+1}(x) \end{vmatrix} \\ &= P_{n+1}(x)\operatorname{arctg} x - \int \frac{P_{n+1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

kde P_{n+1} je polynom stupně $n+1$. Funkci $P_{n+1}(x)/(1+x^2)$ budeme integrovat tak, že nejprve provedeme podíl (s případným zbytkem). Výsledek je tedy prim. funkce k polynomu (který hravě zintegrujeme – viz Příklad 8.18) a zbytek, což je obecně

$$\int \frac{Ax+B}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ jsou nějaké konkrétní konstanty. Tento výraz upravíme s využitím Věty 8.16 na

$$\int \frac{Ax+B}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Uhádnutím nebo s pomocí 1. věty o substituci (o ní jsme ještě nemluvili, je to Věta 8.21) máme

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

a předpis druhé primitivní funkce vidíme hned ze vzorce číslo 11 z Poznámky 8.15.

ad (g): Podíváme-li se na předchozí příklady, budeme chvíli váhat, než učiníme konkrétní volbu. Derivováním i integrováním funkce exponenciální dostáváme ji samotnou a derivováním i integrováním funkce sinus budeme pořád dostávat plus/mínus funkci sinus a kosinus. Takže to vypadá, že by se náš výpočet dostal do nekonečné smyčky, ze které řešení nezískáme. Tato primitivní funkce se hledá opakovaným použitím metody integrace per partes a to tak, že v obou případech se za funkci u vezme goniometrická (sinus nebo kosinus) a za v' se vezme exponenciální (nebo přesně naopak). Platí tedy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u=\sin x & u'=\cos x \\ v'=\mathrm{e}^x & v=\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{vmatrix} u=\cos x & u'=-\sin x \\ v'=\mathrm{e}^x & v=\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rovnost

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

K oběma stranám této rovnosti přičteme $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ a podělíme ji dvěma. Je potřeba připomenout, že symbol $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ je jen *jedna z* primitivních funkcí k funkci $\mathrm{e}^x\sin x$, tzn. na levé a na pravé straně může tento symbol znamenat jinou funkci! Naštěstí to nevadí (proč?). Dostáváme kýžený výsledek

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x).$$

ad (h): Podobně jako v příkladu (e) si integrovanou funkci představíme jako vynásobenou jedničkou, tzn.

$$\begin{aligned}
F_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} &= \begin{vmatrix} u = (x^2+a^2)^{-n} & u' = -n(x^2+a^2)^{-n-1}2x \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nF_n(x) - 2na^2F_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme *rekurentní vzorec*

$$F_{n+1}(x) = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)F_n(x)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Máme-li tedy vypočítat $F_4(x)$ aplikujeme pro $n = 3$ získaný vzorec, kde se na pravé straně objeví ovšem $F_3(x)$. Na to aplikujeme stejný vzorec ale pro $n = 2$. Takto postupujeme až do chvíle, kdy se nám vyskytuje na pravé straně $F_1(x)$, tzn. zbývá ještě určit

$$F_1(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}.$$

Pomocí 1. věty o substituci (viz dále Příklad 8.23(c)) zjistíme, že

$$F_1(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$ ○

Také bychom rádi integrovali složené funkce. Podobně jako tomu bylo u součinu, žádný jednoduchý vzorec neexistuje. Budeme mít k dispozici tzv. *dvě věty o substituci.*

Věta 8.21 (1. věta o substituci)**.** *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ derivaci a $\varphi(J) \subset I$. Pak $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na J neboli*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\varphi(x)}, \quad x \in J.$$

Důkaz. Předpokládáme, že

$$F'(t) = f(t) \quad \forall t \in I.$$

Z předpokladu $\varphi(J) \subset I$ plyne, že $F \circ \varphi$ a $f \circ \varphi$ jsou definované na celém intervalu J. Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \quad \forall x \in J.$$

Tím je dokázáno, že $F \circ \varphi$ je primitivní k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I, neboli

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)), \quad x \in J.$$ □

Poznámka 8.22

- Ve Větě 8.21 je z praktických důvodů výhodnější místo F psát $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ (bohužel se zde nevyhneme zápisu její proměnné, kterou jsme označili jako t). Následně funkční hodnotu funkce F v bodě $\varphi(x)$ (tzn. výraz $F(\varphi(x))$) zapisujeme symbolem
$$\int f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi(x)}.$$
- Vzorce 18 a 19 z Poznámky 8.15 lze odvodit pomocí Věty 8.21, ale ověřit jejich platnost lze prostým zderivováním.

Příklad 8.23 Nalezněte funkční předpisy primitivních funkcí

(a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$,

kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Řešení. ad (a): Vidíme, že integrovaná funkce je ve tvaru součinu, takže začátečník by pravděpodobně nejdříve sáhl po metodě integrace per partes (zkuste to). Správnou volbou v tomto případě je ale věta o substituci (Věta 8.21). Položme
$$f(t) = \mathrm{e}^t,\ t \in I = \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -x^2,\ x \in J = \mathbb{R}.$$
V tom případě
$$f(\varphi(x))\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(-2x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2},\ x \in \mathbb{R},$$
což ale není přesně funkce, k níž hledáme primitivní funkci. To ale nemusí být díky Větě 8.16 žádný problém. Platí totiž
$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\,\mathrm{d}x.$$
Můžeme pak použít Větu 8.21, tzn. píšeme
$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=-x^2}.$$
Podle vzorce 4 z Poznámky 8.15 platí
$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=-x^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\Big|_{t=-x^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$$
a konečně máme výsledek. Takto rozvláčným způsobem ovšem nepočítáme. Tento výpočet by spíš ve sbírce řešených příkladů vypadal nějak takto
$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = -x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + C = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$
Ve skutečnosti jde o velmi jednoduchý příklad, který by již měl trénovaný student vypočítat triviálně, tzn. řešení by měl uhádnout.

ad (b): Šlo by použít metodu integrace per partes, ale rychlejší bude použití první věty o substituci. Pouze je třeba si pamatovat goniometrický vzoreček

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Můžeme tedy psát

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) = \frac{1}{2}\int 1 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \,\mathrm{d}x.$$

První primitivní funkci vypočteme okamžitě ze vzorečku 2 z Poznámky 8.15 a na výpočet toho druhého použijeme první větu o substituci. Následuje jen zkrácený zápis výpočtu:

$$\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = 2x \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot 2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Dohromady tedy máme

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

ad (c): Integrovaná funkce by nám mohla připomínat vzorec 11 z Poznámky 8.15, tzn. výsledkem by byl nějaký arkustangens. To nám ale komplikuje parametr a. Rádi bychom měli místo něj jedničku. Není nic jednoduššího, než konstantu vytknout před integrační znamení, platí totiž

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x^2}{a^2}+1}.$$

Na první pohled se může jevit, že jsme si moc nepomohli. Ale platí

$$\frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

což nás může inspirovat k lineární substituci

$$t = \frac{x}{a}, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a^2}\frac{a}{1}\int \frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

○

Poznámka 8.24 Při meditování nad nejvhodnějším (nebo alespoň správným) způsobem řešení Příkladu 8.23(a) nás mohla napadnout metoda integrace per partes (asi pro $u(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $v'(x) = x$), ale to se ukáže jako slepá ulička. Při úvahách nad použitím věty o substituci je potřeba mít tip na funkci φ. Zde to je celkem jednoduché, téměř se to nabízí:

$$\varphi(x) = -x^2,$$

a to proto, že pak se výraz e^{-x^2} zjednoduší na e^t. To ale ještě neznamená, že substituci lze úspěšně použít. Její použití je umožněno tím, že $\varphi'(x) = -2x$ se vyskytuje v integrované funkci (až na multiplikativní konstantu -2, tu lze libovolně vytýkat před integrační znamení). Např. na celkem nevinně vyhlížející příklad

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

zmíněnou substituci nelze úspěšně použít – právě proto, že tam není výraz $\varphi'(x)$ (pro $\varphi(x) = -x^2$). Dokonce bylo dokázáno, že její primitivní funkce (ačkoliv existuje) se nedá zapsat pomocí elementárních funkcí. Tedy hledání předpisu takovéto funkce je předem odsouzeno k neúspěchu. Mimochodem, tento příklad je pěknou ukázkou krásy matematiky. Víme, že funkce existuje, přestože nejsme schopni najít její funkční předpis (a dokonce víme, že to ani nejde). Funkční hodnoty této funkce lze pak počítat analyticko-numerickými či numerickými metodami.

Věta 8.25 (2. věta o substituci)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na intervalu I; $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na intervalu J derivaci takovou, že pro všechna $x \in J$ platí $\varphi'(x) \neq 0$ a $\varphi(J) = I$. Je-li $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivní k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na J, pak $F \circ \varphi^{-1}$ je primitivní k funkci f na intervalu I, neboli*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Důkaz. Podle Darbouxovy věty (Věta 6.39) je φ' darbouxovská na J. To spolu s faktem, že φ' nemá nulový bod implikuje, že je buď φ' kladná na J nebo je to záporná funkce na J. Tedy podle Věty 7.22 funkce φ je buď rostoucí na J nebo klesající na J. V obou případech je na J prostá. Protože navíc $\varphi(J) = I$, existuje inverzní funkce φ^{-1} taková, že $\mathcal{D}(\varphi^{-1}) = I$ a $\mathcal{H}(\varphi^{-1}) = J$. Podle předpokladu pro všechna $t \in J$ platí

$$F'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Pak pro každé $x \in I$ platí

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi^{-1})'(x) &= F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x),\end{aligned}$$

kde jsme využili větu o derivaci inverzní funkce (Věta 6.15). □

Podobně jako v tvrzení Věty 8.21, značí-li F primitivní funkci k $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, pak výraz $F(\varphi^{-1}(x))$ zapisujeme symbolem

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Prakticky to znamená, že nejprve spočítáme funkční předpis $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ a poté všechny výskyty symbolu t nahradíme výrazem $\varphi^{-1}(x)$.

Příklad 8.26 Vypočtěte primitivní funkci

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

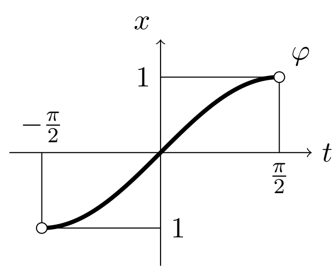
Řešení. Tento příklad lze řešit i metodou integrace per partes – zkuste to (návod: použijte známou fintu $v'(x) = 1$). My si na něm ale ukážeme použití druhé věty o substituci. To již vyžaduje více přemýšlení a opatrnosti, než tomu bylo u věty první. Nejprve zjistěme definiční obor integrované funkce. To je zřejmě interval $[-1, 1]$. Ale stačí hledat tuto primitivní funkci pouze na otevřeném intervalu $(-1, 1)$, viz Poznámku 8.2(d). Použijeme tedy Větu 8.25, přičemž

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in I = (-1, 1).$$

Zbývá vyřešit otázku, jak zvolíme funkci φ. U první věty o substituci jsme moc možností volby neměli – bylo to dáno tím, že se tato funkce vyskytovala v integrované funkci. Nyní se ale φ vyskytuje napravo, tzn. volíme si ji sami. A to tak, aby se situace zjednodušila – podobně jako u integrace per partes! V tomto případě je vhodné zvolit

$$\varphi(t) = \sin t, \quad t \in J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ověřme ale nejprve, že Věta 8.25 tuto volbu vůbec připouští. Evidentně $\varphi'(t) = \cos t > 0$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ a φ zobrazuje interval J na interval I, viz Obrázek 8.1. Zde je pěkně



Obrázek 8.1: Graf funkce φ z Příkladu 8.26.

vidět, že nelze uvažovat tuto substituci na celém intervalu $[-1, 1]$. Podle Věty 8.25 tedy platí

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t,$$

kde na pravé straně po vyjádření předpisu primitivní funkce dosadíme místo proměnné t výraz $\varphi^{-1}(x)$, v tomto případě $\arcsin x$. Nyní hledejme primitivní funkci k $\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t$ na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Protože pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ platí $\cos t > 0$, můžeme upravit

$$\int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int |\cos t| \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Z Příkladu 8.23(b) již víme, že

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Po dosazení $t = \arcsin x$ dostáváme

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C,$$

což ale není zrovna nejjednodušší předpis. Můžeme výraz zjednodušit, protože pro všechna $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ platí

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{\cos^2 t} = 2\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}.$$

Po dosazení $t = \arcsin x$ nyní dostáváme (téměř) konečný výsledek

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Nekomentovaný výpočet primitivní funkce by asi vypadal takto:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{c} \text{2. v. o s.} \\ x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \\ t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ t = \arcsin x \end{array}\right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,\end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Dodejme, že jsme primitivní funkci hledali pouze na intervalu $(-1, 1)$. Nalezený předpis má ale smysl na celém $[-1, 1]$, a je to předpis spojité funkce (opět na tomto intervalu). Nalezli jsme tedy současně i předpis primitivní funkce na celém intervalu $[-1, 1]$. ○

Při použití 2. věty o substituci nemusíme vždy najít primitivní funkci na žádaném intervalu. Jak uvidíme v některých příkladech, pomocí zmíněné věty o substituci jsme schopni nalézt primitivní funkci na dvou intervalech (a, c) a (c, b), přitom bychom rádi našli předpis primitivní funkce na (a, b) (pokud navíc víme, že taková funkce vůbec existuje). S tímto problémem se setkáme v Příkladu 8.27 a obecné tvrzení si zformulujeme ve Větě 8.28.

Příklad 8.27 Vypočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Je vidět, že integrovaná funkce je definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$. Podle Poznámky 8.4, každá funkce, která je na daném intervalu spojitá, má na něm primitivní funkci. Úloha tedy zní nalézt primitivní funkci k zadané funkci na *celém* $\mathbb{R}$. Zkusíme druhou větu o substituci. Samozřejmě položíme

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}, \quad x \in I = \mathbb{R}.$$

Jako výhodná by se mohla jevit substituce

$$\varphi(t) = t^3, \quad t \in J = \mathbb{R},$$

protože po dosazení se úloha zjednoduší (zbavíme se těch odmocnin) a navíc $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Máme ovšem jeden problém a to s nenulovostí derivace, totiž

$$\varphi'(t) = 3t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi'(t) = 0$ právě pro $t = 0$. Definiční obor funkce φ proto rozdělíme na dva intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$. Přitom

$$I_1 = \varphi(J_1) = (-\infty, 0) \quad \text{a} \quad I_2 = \varphi(J_2) = (0, \infty).$$

Druhou větu o substituci tedy použijeme dvakrát: pro stejný předpis funkce φ ale dva různé intervaly I_1 a I_2. Nejprve tedy hledejme primitivní funkci na intervalu I_1. Máme

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \text{2. v. o s.} \\ x = t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \\ t \in J_1 = (-\infty, 0) \\ t = \sqrt[3]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2+1} 3t^2\,\mathrm{d}t = 3\int \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Máme integrovat racionální funkci. Obecný postup integrace takových funkcí si ukážeme až v další kapitole. V tomto jednoduchém příkladě se bez něj ale obejdeme. Podělíme polynom polynomem, což lze realizovat i následující úpravou:

$$\frac{t^3}{t^2+1} = \frac{t^3+t-t}{t^2+1} = \frac{t(t^2+1)-t}{t^2+1} = t - \frac{t}{t^2+1}.$$

Dále

$$3\int \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 3\int t\,\mathrm{d}t - 3\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Na výpočet první primitivní funkce použijeme vzoreček 2 z Poznámky 8.15 a na druhou 1. větu o substituci, konkrétně substituci $s = t^2+1$ a to proto, že $\mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t$. Proto máme

$$\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \text{1. v. o s.} \\ s = t^2+1 \\ \mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln|s| = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

(absolutní hodnotu v argumentu logaritmu jsme vynechali, protože $t^2+1 > 0$). Dohromady dostáváme

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \text{2. v. o s.} \\ x = t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \\ t \in J_1 = (-\infty, 0) \\ t = \sqrt[3]{x} \end{array} \right| = \ldots = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}\ln(t^2+1) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1).$$

Určili jsme tedy primitivní funkci na intervalu I_1. Nalezněme ji nyní na intervalu I_2. Pohled na předchozí výpočet nám ovšem prozradí, že jsme nikde nevyužili faktu, že hledáme primitivní funkci na tom či onom intervalu. Výpočet bude tedy úplně stejný a tedy i předpis primitivní funkce bude stejný jako na intervalu I_1. Dostali jsme tak předpisy (vlastně jen jeden předpis) primitivních funkcí na intervalech I_1 a I_2. My ale hledáme předpis funkce, která je primitivní k f na celém $\mathbb{R}$. Problém je s nulou. Označíme

$$F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1).$$

Doposud jsme tedy zjistili, že F je primitivní k f na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, jinak řečeno

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

K tomu, aby byla F primitivní k f na celém $\mathbb{R}$, stačí pouze ověřit, že $F'(0) = f(0)$. Snadno spočítáme (třeba podle definice derivace s použitím l'Hospitalova pravidla), že $F'(0) = 0$. Pouhým dosazením do předpisu funkce dostáváme také $f(0) = 0$. Můžeme tedy již slavnostně napsat náš výsledek

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1) + C,$$

(na **celém** $\mathbb{R}$) kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. ○

Jak jsme viděli v předchozím příkladu, někdy najdeme primitivní funkci na dvou intervalech majících společný jeden krajní bod (u jednoho levý a druhého pravý). V Příkladu 8.27 jsme našli primitivní funkce na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a ty jsme pak „slepili“ abychom tak získali primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Není to náhoda, viz následující větu.

Věta 8.28 (o slepování primitivních funkcí)**.** *Nechť $f, F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a < c < b$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Je-li F_1 primitivní funkce k f na intervalu (a, c) a F_2 je primitivní k f na intervalu (c, b), f je spojitá v bodě c a existují vlastní limity*

$$A = \lim_{x\to c-} F_1(x), \quad B = \lim_{x\to c+} F_2(x).$$

Pak funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \textit{pro } x \in (a, c), \\ A & \textit{pro } x = c, \\ F_2(x) - B + A & \textit{pro } x \in (c, b), \end{cases}$$

je primitivní k f na (a, b).

Důkaz. Máme dokázat, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Pro všechna $x \in (a, c)$ platí

$$F'(x) = F_1'(x) = f(x)$$

a pro všechna $x \in (c, b)$ platí

$$F'(x) = (F_2(x) - B + A)' = F_2'(x) = f(x).$$

Jediné co zbývá dokázat je, že existuje $F'(c)$ a je rovna $f(c)$. Protože f je v bodě c spojitá a existuje $\lim_{x\to c} F'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, pak podle Poznámky 6.38(a) platí $F'(c) = f(c)$. □

8.3 Integrace racionálních funkcí

Racionální funkce již známe z kapitoly 4. Jsou to funkce s předpisem

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P a Q jsou polynomy.

Je-li $\deg P \geq \deg Q$, pak lze podělit (se zbytkem), tzn. existují polynomy P_1 a P_2 takové, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

kde $\deg P_2 < \deg Q$. Pak

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int P_1(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Integrovat polynom není problém, tzn. těžištěm výpočtu je nalezení primitivní funkce **ryze** lomené funkce. Tu ovšem umíme rozložit na parciální zlomky, tzn. vyjádřit jako jejich součet. Díky Větě 8.16 nakonec vypočítáme primitivní funkce k parciálním zlomkům, tzn. určíme funkční předpisy funkcí

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^n}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kde $p^2-4q<0$, tzn. kvadratický polynom x^2+px+q nemá reálné kořeny (je tzv. ireducibilní v $\mathbb{R}$).

Výpočet primitivních funkcí k parciálním zlomkům ukažme v následujících příkladech.

Příklad 8.29 Určete předpis funkce

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kde $A, x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Nejprve využijme lineární substituce $t = x - x_0$, tzn. počítáme

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^n}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \text{1. v. o s.} \\ t = x - x_0 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = A \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = A \int t^{-n}\,\mathrm{d}t.$$

Pro $n=1$ je výsledek

$$\ldots = A \ln|t| + C = A \ln|x-x_0| + C$$

a pro $n>1$ je výsledek

$$\ldots = A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)t^{n-1}} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}} + C.$$ ○

Příklad 8.30 Určete předpis funkce

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kde $p, q, B, C \in \mathbb{R}$, $p^2-4q<0$, $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Kvadratický dvojčlen ve jmenovateli si převedeme na „úplný čtverec“, tzn. použijeme standardní středoškolskou úpravu

$$x^2+px+q = \ldots = (x-x_0)^2 + a^2,$$

kde
$$x_0 = \frac{p}{2} \quad \text{a} \quad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Dostáváme tak
$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Bx + C}{[(x - x_0)^2 + a^2]^n}\,\mathrm{d}x$$

Nyní použijeme lineární substituci $t = x - x_0$, tzn. $x = t + x_0$ a dostáváme tak

$$\int \frac{Bx + C}{((x - x_0)^2 + a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 1.\text{ v. o s.} \\ t = x - x_0 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{B(t + x_0) + C}{(t^2 + a^2)^n}$$
$$= B \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}\,\mathrm{d}t + (Bx_0 + C) \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + a^2)^n}.$$

S první primitivní funkcí si poradíme následovně

$$\int \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2 + a^2)^n}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} 1.\text{ v. o s.} \\ s = t^2 + a^2 \\ \mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s^n}\,\mathrm{d}s,$$

s čímž si dále poradíme stejně jako v Příkladu 8.29. Pro výpočet zbývající primitivní funkce si odvodíme rekurentní vzorec, který ihned opakovaně použijeme, viz Příklad 8.20(h). ◯

Ukažme si nyní konkrétní příklady.

Příklad 8.31 Vypočtěte

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}\,\mathrm{d}x,$ (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2}.$

Řešení. ad (a): Vidíme, že nejde o ryzí racionální funkci, tedy částečně podělíme. Dostáváme tak
$$\int \frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^3(x - 2)}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní můžeme provést rozklad na parciální zlomky (což už umíme z kapitoly 4):

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^3(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 2},$$

přičemž po chvíli počítání nalezneme $A = -3$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 5$. Dostáváme

$$\int \frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}\,\mathrm{d}x = x + \int \left(-\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x - 2} \right) \mathrm{d}x$$
$$= x - 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + 5\ln|x - 2| + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ (na každém intervalu neobsahujícím 0 a 2).
ad (b): Zde jde o ryzí racionální funkci, tedy můžeme přímo provést rozklad na parciální zlomky:
$$\frac{1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Po chvíli počítání dojdeme k $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$. Tedy máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Máme nyní k počítání tři primitivní funkce. První určíme jednoduše, stačí použít první větu o substituci; platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1|.$$

Nyní se podívejme na určení předpisů primitivních funkcí

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} \quad \text{a} \quad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}.$$

V obou případech jde o speciální případ zadání z Příkladu 8.30. Ukažme si alternativní postup: úvahy budeme používat stejné, jen v jiném pořadí. V obou případech bychom rádi použili 1. větu o substituci, konkrétně

$$t = x^2 + x + 1, \quad \text{tzn. pak } \mathrm{d}t = (2x+1)\,\mathrm{d}x.$$

To je problém, protože v čitateli máme pouze x. Kýžený výraz tam ale můžeme propašovat naším oblíbeným trikem:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

U první primitivní funkce použijeme zmíněnou substituci, druhou se budeme snažit vhodnou substitucí převést na arkus tangens. Máme

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+1).$$

U druhé budeme teprve hledat vhodnou substituci. Upravíme nejprve jmenovatel do vhodnějšího tvaru (tzv. doplnění na čtverec a něco navíc)

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1\right)$$
$$= \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right).$$

Pak

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

Použitím lineární substituce

$$t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \quad \text{tzn. } \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x,$$

dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Druhá primitivní funkce má tedy předpis

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Zbývá najít předpis primitivní funkce

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Stejně jako v předchozím bychom rádi substituci $t = x^2+x+1$. Toho dosáhneme stejně, tzn. upravíme

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Dostáváme

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x^2+x+1 \\ \mathrm{d}t = (2x+1)\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+1}.$$

U druhé primitivní funkce ještě budeme hledat vhodnou substituci. Použijeme předešlý výpočet a máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{16}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2} = \left| \begin{matrix} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

Na poslední výraz použijeme rekurentní vzorec odvozený v Příkladu 8.20(h). Podle něj platí

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t.$$

Dosazením za t pak dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} &= \ldots = \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Třetí primitivní funkce má tedy předpis

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{\sqrt{3}}{16}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+x+1)^2} &= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{16}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,\end{aligned}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ (na každém intervalu neobsahujícím číslo -1). Výsledek jde ještě zjednodušit.
○

8.4 Speciální substituce

Následuje pouze souhrn některých substitucí s ukázkami použití těch komplikovanějších (zejména tam, kde je nutné slepování – viz Větu 8.28). Podrobnější popis zde zmíněných a dalších substitucí může čtenář najít např. v [4]. Řešené příklady lze nalézt v [4,7]. Velkým množstvím příkladů oplývá světoznámá sbírka příkladů [5].

8.4.1 Iracionální funkce

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{s_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{s_k}\right) \mathrm{d}x,$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Q}$, d, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$. Označíme s nejmenší společný jmenovatel zlomků $s_1, \dots, s_k$ a volíme substituci (2. v. o s.)

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

a tedy

$$x = \frac{b - dt^s}{ct^s - a}.$$

8.4.2 Eulerovy substituce

Tyto substituce používáme na výpočet primitivních funkcí tvaru

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,\mathrm{d}x.$$

Máme celkem tři substituce (2. v. o s.):

- 1. Eulerova substituce: Je-li $a > 0$, pak volíme substituci

  $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t,$$

  kde máme možnost volby znaménka podle situace.

- 2. Eulerova substituce: Je-li $c > 0$, pak volíme substituci

  $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c},$$

  kde máme možnost volby znaménka podle situace.

- 3. Eulerova substituce: Má-li $ax^2 + bx + c$ reálné kořeny α, β, pak lze psát

  $$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

  a klademe

  $$t = \sqrt{a\frac{x - \alpha}{x - \beta}}.$$

  Pak

  $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - \beta|\sqrt{a\frac{x - \alpha}{x - \beta}}.$$

Příklad 8.32 Určete
$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve určeme interval, na kterém má smysl primitivní funkci hledat. Definiční obor integrandu je $[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$ (ověřte), přitom je na něm i spojitý. To je tedy hledaný interval. Můžeme použít druhou Eulerovu substituci, protože položíme-li

$$ax^2+bx+c = 1-2x-x^2,$$

je splněna nerovnost $c>0$. Podle návodu tedy přejděme k nové proměnné t, pro kterou platí
$$\sqrt{1-2x-x^2} = xt \pm 1.$$

Vidíme, že zde máme svobodu volby znaménka u čísla 1 – v tomto případě zvolíme s výhodou minus. Nyní rovnost
$$\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$$

umocníme na druhou a po úpravě dostáváme

$$-x(2+x) = x(xt^2-2t).$$

V této chvíli podělíme rovnici proměnnou x, což není tak úplně v pořádku, protože x nabývá hodnot z intervalu $[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$ obsahující ve svém vnitřku právě nulu. Dále tedy musíme předpokládat, že $x\neq 0$, tedy

$$x\in[-1-\sqrt{2},0)\cup(0,-1+\sqrt{2}].$$

Jak za chvíli uvidíme, povede to k hledání primitivní funkce právě na těchto dvou intervalech. Pokračujme dále v našem výpočtu. Po úpravách docházíme k rovnosti

$$x = 2\frac{t-1}{t^2+1} \quad \big(=\varphi(t)\big),$$

což je kýžená substituce. Snadno již dostáváme

$$\mathrm{d}x = 2\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pro úplnost dodejme, že nyní budeme hledat primitivní funkci zvlášť na intervalech

$$I_1=(0,-1+\sqrt{2}] \quad \text{a} \quad I_2=[-1-\sqrt{2},0)$$

se stejným předpisem $x=\varphi(t)$, kde t probíhá intervaly

$$J_1=\left(1,\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right] \quad \text{a} \quad J_2=\left[\frac{1}{-1-\sqrt{2}},1\right),$$

viz druhou větu o substituci. Máme

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2\frac{t-1}{t^2+1}t-1}2\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \int \frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)t(t-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Substituce splnila svůj účel, převedla úlohu na integraci racionální funkce. Po provedení rozkladu na parciální zlomky dále platí

$$\int \frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)t(t-1)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\ln|t| + \ln|t-1| + -2\operatorname{arctg} t = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t.$$

Vrátíme se nyní k původní proměnné x pomocí vztahu

$$t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}$$

a dostáváme

$$\ldots = \ln\left|\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1-x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1}\right| - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} = F_0(x).$$

To je předpis primitivní funkce pouze na intervalech I_1 a I_2. Naším cílem ale bylo najít primitivní funkci na celém definičním intervalu zadané funkce. To můžeme provést „slepením“ ve smyslu Věty 8.28, protože

$$\lim_{x\to 0-} F_0(x) = \pi \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0+} F_0(x) = -\pi$$

a integrand je spojitá funkce v bodě 0. Hledaná primitivní funkce má tedy předpis

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x) & \text{pro } x \in [-1-\sqrt{2}, 0), \\ \pi & \text{pro } x = 0, \\ F_0(x) + 2\pi & \text{pro } x \in (0, 1-\sqrt{2}]. \end{cases}$$

Všechny primitivní funkce pak mají samozřejmě předpis tvaru $F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$, se stejným definičním oborem, kterým je interval $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$. ○

Příklad 8.33 Určete

$$\int \frac{1}{x+2\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve určeme interval, na kterém je integrand spojitý. Jeho definiční obor je $[1,2]$, přitom je na celém tomto intervalu spojitý. Protože kvadratický polynom pod odmocninou má dva reálné kořeny, můžeme použít třetí Eulerovu substituci. Pro $x \in (1,2]$ lze upravit

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{-(x-1)(x-2)} = \sqrt{-\frac{(x-1)^2}{x-1}(x-2)} = (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}.$$

Substituci podle návodu volíme

$$t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}.$$

Protože x probíhá interval $(1,2]$ (všimněme si, že námi zvolená substituce nefunguje na celém intervalu $[1,2]$), pak t probíhá celý interval $[0,\infty)$. Vyjádření

$$x = 1 + \frac{1}{t^2+1}$$

snadno dostaneme ze vztahu mezi t a x. Odtud již snadno vypočítáme

$$\mathrm{d}x = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Můžeme se již pustit do samotného určování předpisu primitivní funkce. Platí tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+2\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\frac{t^2+2}{t^2+1}+2\left(1+\frac{1}{t^2+1}-1\right)t}\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ldots = \int \frac{-2t}{(t^2+1)(t^2+2t+2)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Po provedení rozkladu na parciální zlomky dále máme

$$\begin{aligned}\ldots &= \frac{1}{5}\int \frac{-2t-4}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{5}\int \frac{2t+8}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{5}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{5}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{5}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{5}\int \frac{6}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{5}\ln(t^2+1) - \frac{4}{5}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{5}\ln(t^2+2t+2) + \frac{6}{5}\operatorname{arctg}(t+1)\\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{t^2+2t+2}{t^2+1} - \frac{4}{5}\operatorname{arctg} t + \frac{6}{5}\operatorname{arctg}(t+1).\end{aligned}$$

Vrátíme-li se k původní proměnné x, pak po úpravě dostáváme

$$\ldots = \frac{1}{5}\ln(x+2\sqrt{-x^2+3x-2}) - \frac{4}{5}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + \frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+1\right) =: F_0(x).$$

Dostáváme tak pouze předpis primitivní funkce na intervalu $(1,2]$. Protože ale

$$\lim_{x\to 1+} F_0(x) = -\frac{4}{5}\frac{\pi}{2} + \frac{6}{5}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5}$$

a definujeme-li

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{5} & \text{pro } x = 1,\\ F_0(x) & \text{pro } x \in (1,2],\end{cases}$$

pak všechny hledané primitivní funkce mají předpis ve tvaru $F(x)+C$, kde $C\in\mathbb{R}$. ○

8.4.3 Binomické integrály

Jde o primitivní funkce ve tvaru

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$$

kde $m,n,a,b,p\in\mathbb{R}$. Volíme následující substituce pro následující případy:

- $p\in\mathbb{Z}$, $m,n\in\mathbb{Q}$, pak je substituce

  $$x = t^s$$

  kde s je společný jmenovatel čísel m,n,

- $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Q}$, pak je substituce
$$a + bx^n = t^s$$
kde s je jmenovatel čísla p,
- $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ pak máme
$$ax^{-n} + b = t^s$$
kde s je jmenovatel čísla p.

8.4.4 Goniometrické funkce

Nyní se budeme bavit primitivními funkcemi ve tvaru
$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x.$$
Volíme následující substituce (při výběru zachovávejte uvedené pořadí!):

- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak je substituce
$$t = \sin x \quad \text{(1. věta o subst.)}$$
- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak je substituce
$$t = \cos x \quad \text{(1. věta o subst.)}$$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak je substituce
$$t = \operatorname{tg} x \quad \text{(2. věta o subst.).}$$
Použití této substituce je ale komplikovanější, protože (viz 2. větu o substituci) je možné ji použít pouze na intervalech
$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Pak platí
$$x = \operatorname{arctg} t + k\pi, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Odtud lze vyjádřit
$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$
a
$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}.$$
Pro provedení substituce integrujeme vzniklou racionální funkci.

- Univerzální substitucí je

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{(2. věta o subst.).}$$

Použití této substituce je ale komplikovanější, protože (viz 2. větu o substituci) je možné ji použít pouze na intervalech

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak platí

$$x = 2\operatorname{arctg} t + k\pi, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Odtud lze vyjádřit

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

a

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Jak již bylo řečeno, u posledních dvou substitucí může nastat problém právě s tím, že primitivní funkci nenalezneme na celém intervalu, na kterém primitivní funkce ve skutečnosti existuje, ale pouze na zmíněných otevřených intervalech (popř. jejich podintervalech). To se vyřeší opět „slepováním“.

Ukažme si použití druhé věty o substituci na následujícím příkladu.

Příklad 8.34 Nalezněte předpis funkce

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrovaná funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tedy smysl hledat její primitivní funkci na tomto intervalu, viz Poznámku 8.4. Jde o integraci goniometrické funkce ve tvaru

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde} \quad R(x,y) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Z navrhovaných substitucí se rozhodneme pro třetí, tzn.

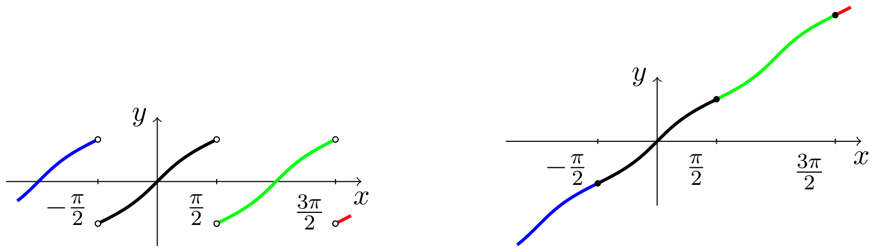
$$t = \operatorname{tg} x, \tag{8.1}$$

přičemž použijeme druhou větu o substituci. Nejprve si ujasněme, pro jaké funkce f, φ a intervaly I a J použijeme Větu 8.25. Zřejmě

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}.$$

Zbývající zjistíme ze vztahu (8.1). Uvažujme restrikci funkce tg na interval $I = (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Je to rostoucí (tedy prostá) funkce, a tedy k ní existuje inverzní funkce. Protože pro každé $x \in I$ platí

$$x - k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$



(a) Nespojitá funkce F_0. (b) Výsledná primitivní funkce F.

Obrázek 8.2: Tvorba primitivní funkce slepováním v Příkladu 8.34.

pak rovnost

$$t = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - k\pi),$$

platí právě tehdy, když

$$x - k\pi = \operatorname{arctg} t, \quad \text{tzn.} \quad x = \operatorname{arctg} t + k\pi.$$

Proto můžeme položit

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} t + k\pi, \quad t \in J = \mathbb{R} \quad \text{a} \quad I = \varphi(J) = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Nyní přistupme k samotnému provedení substituce. Platí

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

a jak už víme, platí

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}.$$

Pak

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right).$$

Dostali jsme tak primitivní funkci k funkci $1/(1+\sin^2 x)$ na intervalech $(-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$; označme ji F_0. Jde o π-periodickou funkci definovanou na sjednocení všech intervalů ve tvaru $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a platí

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-} F_0(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+} F_0(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

pro všechna $k \in \mathbb{Z}$, viz Obrázek 8.2a.

Použijeme nyní stejný trik slepování jako v Příkladu 8.32. Začneme nalepovat na intervalech $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ postupně pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ a pak $k = -1, -2, \ldots$. Tedy funkci F_0 necháme na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ (interval odpovídající $k = 0$) tak, jak je. Na intervalu $(\pi/2, 3\pi/2)$ (odpovídající $k = 1$) přičteme k předpisu $F_0(x)$ číslo

$$1 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Na intervalu $(3\pi/2, 5\pi/2)$ (odpovídající $k = 2$) přičteme k předpisu $F_0(x)$ číslo

$$2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Obecně na intervalu $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ předefinujeme $F_0(x)$ tak, že přičteme konstantu

$$k \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Podobně pro intervaly odpovídající číslům $k = -1, -2, \ldots$. Dostáváme tak novou funkci (označme ji symbolem F), která je spojitá v $\mathbb{R}$ až na body $\pi/2 + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, přičemž v nich má odstranitelné nespojitosti. Není nic jednoduššího, než je v těchto bodech vhodně dodefinovat. Pak vzhledem k Větě 8.28 můžeme říct, že funkce

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

je funkce primitivní k zadané funkci na celém $\mathbb{R}$. Její graf je načrtnut na Obrázku 8.2b. ○

V souvislosti s Fourierovými řadami se také setkáme s primitivními funkcemi ve tvaru

$$\int \sin mx \cos nx \,\mathrm{d}x$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$. Tyto můžeme snadno určit s použitím pomocí „vzorce“ ze Cvičení 4.59(11).

8.4.5 Funkce tvaru $\int \sin^\nu x \cos^\mu x \,\mathrm{d}x$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

- Je-li $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, jde o předchozí případ.
- Je-li μ celé liché, pak volíme substituci $t = \sin x$; je-li ν celé liché, volíme substituci $t = \cos x$; je-li $\mu + \nu$ celé sudé, volíme substituci $t = \operatorname{tg} x$ nebo $t = \operatorname{cotg} x$. Substituce vede na binomický integrál.
- Je také možno volit substituci

$$t = \sin^2 x \ (= 1 - \cos^2 x), \quad \mathrm{d}t = 2 \sin x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Pak
$$\int \sin^\nu x \cos^\mu x \,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{2} \int t^{\frac{\nu-1}{2}} (1-t)^{\frac{\mu-1}{2}} \,\mathrm{d}t$$
a opět dostáváme binomický integrál.

8.4.6 Hyperbolické funkce

Primitivní funkce typu
$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \,\mathrm{d}x,$$
kde R je racionální funkce, řešíme podobně jako integrace goniometrických funkcí:

- je-li $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, pak volíme substituci $t = \operatorname{sh} x$;
- je-li $R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, pak volíme substituci $t = \operatorname{ch} x$;
- je-li $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, pak volíme substituci $t = \operatorname{tgh} x$. Pak
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2},$$
a snadno lze odvodit
$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-t^2}.$$
- Univerzální substitucí je
$$t = \operatorname{tgh} x, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2},$$
a snadno lze odvodit, že
$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Použití těchto substitucí je podobné jako u integrace goniometrických funkcí. Zásadně se pak také použijí obdobné vzorce, viz Cvičení 4.68.

8.4.7 Funkce tvaru $\int \operatorname{sh}^\nu x \operatorname{ch}^\mu x \, \mathrm{d}x$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$. Tento typ vyšetřujeme podobně jako v sekci 8.4.5.

8.4.8 Exponenciální funkce

Uvažujme spojitou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. K určení primitivní funkce
$$\int f(\mathrm{e}^{\alpha x}) \, \mathrm{d}x \quad (\alpha \neq 0)$$
použijeme 1. větu o substituci, konkrétně
$$t = \mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \mathrm{d}t = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \, \mathrm{d}x.$$
Pak
$$\int f(\mathrm{e}^{\alpha x}) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int \frac{f(\mathrm{e}^{\alpha x})}{\mathrm{e}^{\alpha x}} \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Kapitola 9

Riemannův integrál

Pojem integrálu je poměrně starý a původně vznikl jako odpověď na otázku hodnoty obsahu rovinných útvarů, jejichž hranice (okraj) nemusí být složen z úseček. Pod rovinným útvarem si zde přestavujme různé obrazce složené z trojúhelníků, částí kruhů, úsečí parabol, kruhů apod. Asi nejstarší je Eudoxova exhaustivní metoda (viz např. [11]). Nevýhodou bylo to, že ke každému útvaru se muselo přistupovat zvlášť, k výpočtu se využívalo specifických vlastností konkrétního útvaru. Výpočet tak byl velmi složitý, šlo často o téměř nadlidský výkon. Moderní integrální počet to umí ve většině případů rychleji, jednotně a pro mnohem více typů rovinných obrazců.

Pojem *obsahu rovinného obrazce* zde budeme chápat intuitivně, a to jako číslo, které přiřazujeme rovinným obrazcům (budeme je chápat jako podmnožiny kartézské mocniny $\mathbb{R}^2$), přičemž toto přiřazení má následující vlastnosti:

- obsah obdélníku o délkách stran a a b je roven ab (obdélníkem budeme rozumět kartézský součin $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, přičemž délky jeho stran jsou $x_2 - x_1$ a $y_2 - y_1$),
- je-li rovinný útvar A složen ze dvou rovinných útvarů A_1 a A_2 majících společné nejvýše „části hranice“, pak obsah A je roven součtu obsahů A_1 a A_2,
- obsahuje-li rovinný útvar A jiný útvar B, pak obsah B je menší nebo roven obsahu A.

V této kapitole nás bude zajímat speciálním typem rovinného útvaru.. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$. S pomocí výše uvedených vlastností obsahu si ukážeme, jak teoreticky uchopit obsah množiny

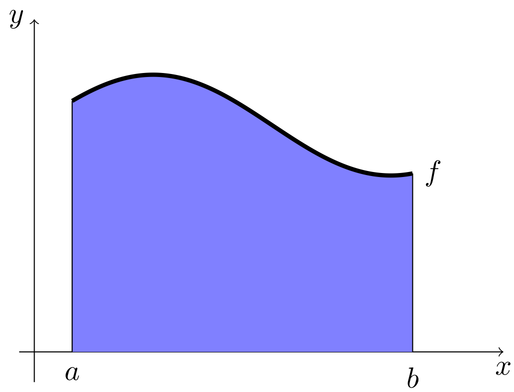
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \in [a, b] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

což je tzv. *podgraf funkce f na intervalu* $[a, b]$ – viz Obrázek 9.1.

Podgraf funkce f je vlastně rovinný obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce f. Obsah tohoto útvaru v této kapitole podchytíme pojmem podle kterého je pojmenovaná celá tato kapitola. Jak dále uvidíme, Riemannův integrál lze definovat nejen pro nezáporné ale obecně pro *ohraničené* funkce na daném intervalu, i když geometrický význam tohoto pojmu je pak o něco komplikovanější (viz Příklad 9.24). Na druhou stranu uvidíme, že pro některé „velmi divoké“ funkce Riemannův integrál neexistuje.

9.1 Definice Riemannova integrálu

Začneme pojmy souvisejícími s definičním oborem integrované funkce, což bude uzavřený ohraničený interval.



Obrázek 9.1: Podgraf funkce f.

Definice 9.1 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- *Dělením intervalu* $[a, b]$ rozumíme každou konečnou množinu $D \subset [a, b]$ takovou, že $a, b \in D$.
- Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ budeme značit symbolem $\mathfrak{D}([a, b])$.
- Je-li $D \in \mathfrak{D}([a, b])$, značíme

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

kde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Bodu x_i říkáme *i-tý dělicí bod* dělení D, intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ *i-tý dělící interval* dělení D. Délce nejkratšího dělicího intervalu říkáme *norma dělení*, značíme $\nu(D)$, tzn.

$$\nu(D) = \min\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

- Jsou-li D_1, $D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$ dvě dělení taková, že

$$D_1 \subset D_2$$

tzn. každý bod z dělení D_1 je také dělicím bodem dělení D_2, říkáme, že D_2 *je zjemněním* D_1, značíme $D_2 \succ D_1$.

- Dělení intervalu $[a, b]$ nazveme *ekvidistantní*, jestliže délky všech jejích sousedících dělicích intervalů jsou stejné, tzn $x_i - x_{i-1} = x_j - x_{j-1}$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$.

Příklad 9.2 Uvažujme interval $[a, b] = [0, 2]$. Jeho děleními jsou např. množiny $D_1 = \{0, 2\}$, $D_2 = \{0, 1, 2\}$, $D_3 = \{0, 1/2, 1, 2\}$, $D_4 = \{0, 3/2, 2\}$. Prvním (a jediným) dělicím intervalem dělení D_1 je celý interval $[0, 2]$. Dělení D_2 má dva dělicí intervaly: $[0, 1]$ a $[1, 2]$. Dělení D_3 má tři dělicí intervaly: $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ a $[1, 2]$. Konečně D_4 má dva dělicí intervaly: $[0, 3/2]$ a $[3/2, 2]$. Dále platí $D_3 \succ D_2 \succ D_1$, $D_4 \not\succ D_2$, $D_4 \not\succ D_3$. Dělení D_1, D_2 jsou ekvidistantní,

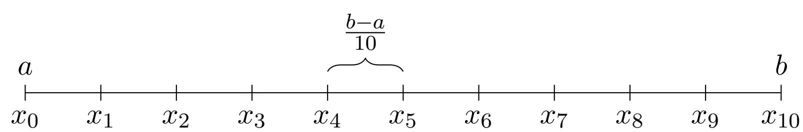
D_3, D_4 nejsou. Kreslete!

Poznámka 9.3

- Dělení intervalu je tedy každá konečná podmnožina intervalu $[a, b]$ obsahující krajní body tohoto intervalu. Nejmenší možné dělení intervalu $[a, b]$ je $\{a, b\}$.
- Máme-li dvě dělení D_1, $D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$, pak jejich sjednocení
$$D = D_1 \cup D_2$$
je také dělení intervalu $[a, b]$ a přitom je zjemněním jak dělení D_1 tak D_2.

Poznámka 9.4

(a) Definice ekvidistantního dělení vysvětluje přímo i volbu názvu tohoto pojmu. Jak ale vypadá libovolné ekvidistantní dělení intervalu $[a, b]$? Podle definice jsou délky všech dělicích bodů stejné. Tedy vezmeme přirozené číslo n a rozdělíme interval $[a, b]$ na stejně dlouhé intervaly o délce
$$h = \frac{b-a}{n}.$$
Dělicími body pak jsou
$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)h, \quad x_n = a + nh = b,$$
viz Obrázek 9.2.



Obrázek 9.2: Ekvidistantní dělení intervalu $[a, b]$ o 10 dělicích intervalech.

Je jasné, že norma tohoto dělení je rovna číslu h.

(b) S pomocí ekvidistantního dělení lze na daném intervalu $[a, b]$ vždy zkonstruovat dělení o libovolně malé normě. Zvolme libovolně malé $\delta > 0$. Na intervalu $[a, b]$ uvažujme ekvidistantní dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tzn.
$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$
Podle Archimedova axiomu lze vždy najít tak velké přirozené číslo n, pro které
$$\nu(D) = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Nyní se můžeme zaměřit na definici integrálních součtů.

Definice 9.5 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a, b])$. Pak součet

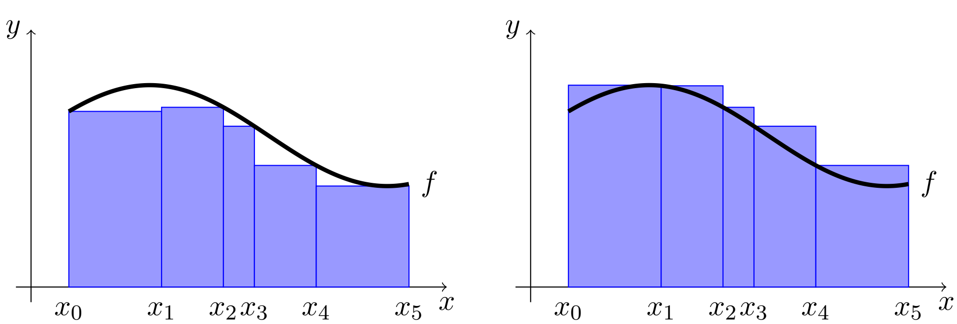
$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

kde $m_i = \inf\{f(x) \; ; \; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, \ldots, n$, nazýváme *dolní Riemannův součet funkce* f *při dělení* D. Součet

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}),$$

kde $M_i = \sup\{f(x) \; ; \; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, \ldots, n$, nazýváme *horní Riemannův součet funkce* f *při dělení* D.

Poznámka 9.6 Riemannovy součty mají jednoduchý geometrický význam. Z Obrázku 9.3 je jasné, že dolní součty jsou rovny součtu obsahů obdélníků o délkách stran $(x_i - x_{i-1})$ a m_i pro $i = 1, \ldots, n$, protože tyto obdélníky mají společné nanejvýš části svých hranic. Navíc, „sjednocení těchto obdélníků" je podmnožinou podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$. Tedy podle zmíněných vlastností obsahu je dolní součet menší než by měl být obsah podgrafu. Jde vlastně o dolní odhad. Z obrázku můžeme tušit, že pokud bereme dělení jemnější a jemnější, pak rozdíl mezi obsahem podgrafu a dolním Riemannovým součtem se zmenšuje. Podobně to lze říct i pro horní součty. To je obsahem Lemmatu 9.7.



Obrázek 9.3: Geometrický význam dolního a horního Riemannova součtu.

Lemma 9.7. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $[a, b]$, tzn. existují $c, d \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in [a, b]$ platí*

$$c \leq f(x) \leq d.$$

Pak

(a) pro každé $D \in \mathfrak{D}([a, b])$ platí

$$c(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq d(b-a),$$

(b) pro každé $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$, $D_1 \subset D_2$ platí

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_2) \leq S(f, D_2) \leq S(f, D_1),$$

(c) pro každé $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$ platí

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2).$$

Důkaz. ad (a): Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a, b])$. Podle předpokladu pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí

$$c \leq m_i \leq M_i \leq d,$$

kde $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$ a $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$. Vynásobíme-li tyto rovnosti rozdílem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme všechny tyto nerovnosti, dostáváme

$$c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq d \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

Zřejmě

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

ad (b): Dokažme nejprve tvrzení pro dvojici $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$ dělení takových, že $D_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a $D_2 = D_1 \cup \{\xi\}$, kde $\xi \in [a, b] \setminus D_1$, tzn. D_2 se liší od D_1 pouze jedním dělicím bodem. Pak existuje $i \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$. Označíme-li

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad m_i' = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad m_i'' = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

pak

$$m_i' \geq m_i \quad \text{a} \quad m_i'' \geq m_i$$

a tedy také

$$m_i'(\xi - x_{i-1}) \geq m_i(\xi - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad m_i''(x_i - \xi) \geq m_i(x_i - \xi).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostáváme

$$m_i'(\xi - x_{i-1}) + m_i''(x_i - \xi) \geq m_i(\xi - x_{i-1}) + m_i(x_i - \xi) = m_i(x_i - x_{i-1}).$$

K oběma stranám nerovností postupně přičteme součiny $m_j(x_j - x_{j-1})$ pro $j = 1, \dots, n$, s výjimkou $m_i(x_i - x_{i-1})$. Podíváme-li se na obě strany výsledných výrazů, zjistíme, že jsme dostali nerovnost

$$s(f, D_2) \geq s(f, D_1).$$

A jak dokázat tvrzení (b) obecně? Nechť $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$ jsou takové, že $D_1 \subset D_2$. Pak lze snadno zkonstruovat k dělení $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, …, $D_{(k)}$ tak, že

$$D_1 = D_{(1)} \subset D_{(2)} \subset D_{(3)} \subset \ldots \subset D_{(k)} = D_2,$$

a přitom $D_{(i)}$ se od $D_{(i-1)}$ liší pouze jedním dělicím bodem pro každé $i = 2, \dots, k$. Pak podle předchozí části dostáváme ihned

$$s(f, D_1) = s(f, D_{(1)}) \leq s(f, D_{(2)}) \leq \ldots \leq s(f, D_{(k)}) = s(f, D_2).$$

Podobně se dokáže nerovnost $S(f, D_1) \geq S(f, D_2)$.
ad (c): Nechť nyní $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$ jsou libovolná. Označme $D = D_1 \cup D_2$. Pak zřejmě

$$D_1 \subset D \quad \text{a} \quad D_2 \subset D.$$

Pak podle (a) a (b) platí

$$s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq s(f, D_2).$$

□

Poznámka 9.8 Z Lemmatu 9.7(a) plyne, že množiny

$$\{s(f, D)\ ;\ D \in \mathfrak{D}([a, b])\}, \quad \{S(f, D)\ ;\ D \in \mathfrak{D}([a, b])\}$$

jsou pro ohraničenou funkci f ohraničené, což nás opravňuje k Definici 9.9.

Definice 9.9 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $[a, b]$. Supremum množiny

$$\{s(f, D)\ ;\ D \in \mathfrak{D}([a, b])\}$$

nazýváme *dolní Riemannův integrál funkce f přes interval* $[a, b]$ a značíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dále, infimum množiny

$$\{S(f, D)\ ;\ D \in \mathfrak{D}([a, b])\}$$

nazýváme *horní Riemannův integrál funkce f přes interval* $[a, b]$ a značíme $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 9.10 Z Lemmatu 9.7(c) okamžitě plyne nerovnost

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dolní Riemannův integrál vznikne z dolních integrálních součtů, které odpovídají obsahům sjednocení obdélníků, které jsou obsaženy v podgrafu funkce f. Podobně dostáváme i horní Riemannův integrál. Obě čísla jsou horkými kandidáty pro to, být hledaným obsahem podgrafu funkce f. Ale které z nich je to pravé? Je to jako s člověkem, který má dvoje hodinky – nikdy si není jistý, jaký je správný čas; na rozdíl od člověka, který má pouze jedny. Asi ale cítíme, že by tato čísla měla být stejná. Ovšem, jak uvidíme v Příkladu 9.12, jsou funkce, u kterých to neplatí. Konečně se dostáváme k hlavnímu pojmu této kapitoly.

Definice 9.11 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $[a, b]$. Platí-li

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazývá se funkce f *integrovatelná (riemannovsky; v Riemannově smyslu) na intervalu* $[a, b]$. V tomto případě definujeme *Riemannův integrál funkce* f *přes* $[a, b]$ jako společnou hodnotu dolního a horního Riemannova integrálu a značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ budeme označovat $\mathcal{R}([a, b])$.

Příklad 9.12

(a) Uvažujme konstantní funkci $f(x) = c$, $x \in [a, b]$. Zjistěme, zda je tato funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Podle Definice 9.11 stačí ověřit rovnost dolního a horního Riemannova integrálu. Uvažujme libovolné dělení $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ intervalu $[a, b]$. Platí

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Tedy množina všech dolních součtů je jednoprvková a platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{c(b - a)\} = c(b - a).$$

Podobně vypočítáme

$$S(f, D) = c(b - a)$$

pro každé $D \in \mathfrak{D}([a, b])$, tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{c(b - a)\} = c(b - a).$$

Podle Definice 9.11 integrál existuje a současně jsme našli i jeho hodnotu, což je $c(b - a)$. Vzhledem ke geometrickému významu Riemannova integrál by nás výsledek neměl překvapit.

(b) Uvažujme tzv. Dirichletovu funkci

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

a vyšetřeme existenci Riemannova integrálu na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Uvažujme libovolné dělení $D = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a, b])$. Pro každé $i = 1, \dots, n$ platí

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} \chi_{\mathbb{Q}} = 0,$$

tedy

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

a následně

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{0\} = 0.$$

Protože pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} \chi_{\mathbb{Q}} = 1,$$

podobně vypočítáme

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a,$$

tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{b - a\} = b - a > 0.$$

Podle Definice 9.11 integrál neexistuje.

Následující lemma bude důležité pro důkaz dalších vět, korunovaných Leibnizovou–Newtonovou formulí, tedy Větou 9.22. Jeho důkaz je techničtější, poctivý čtenář si ho sám dohledá, např. v [4].

Lemma 9.13. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ tak, že pro všechna $D \in \mathfrak{D}([a,b])$, splňující $\nu(D) < \delta$ platí*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < s(f,D) \quad a \quad S(f,D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Poznámka 9.14 Lemma 9.13 dává důležitou informaci o vztahu mezi zlepšováním aproximace obsahu podgrafu a „jemností“ odpovídajících dělení. Zjednodušeně řečeno říká, že předepíšeme-li si požadovanou přesnost výpočtu dolního (resp. horního) integrálu – dané číslem ε, pak existuje takové malé číslo δ s vlastností, že vezmeme-li libovolné dělení s normou menší než toto δ, odpovídající dolní (resp. horní) součet již dostatečně přesně aproximuje dolní (resp. horní) integrál.

Podívejme se nyní na trochu jiný způsob aproximace obsahu podgrafu funkce. Potřebujeme k tomu nejprve pojem *výběru z dělicích intervalů dělení.*

Definice 9.15 Nechť $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a,b])$. Pak každou konečnou množinu $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \quad \text{pro všechna } i = 1, \ldots, n$$

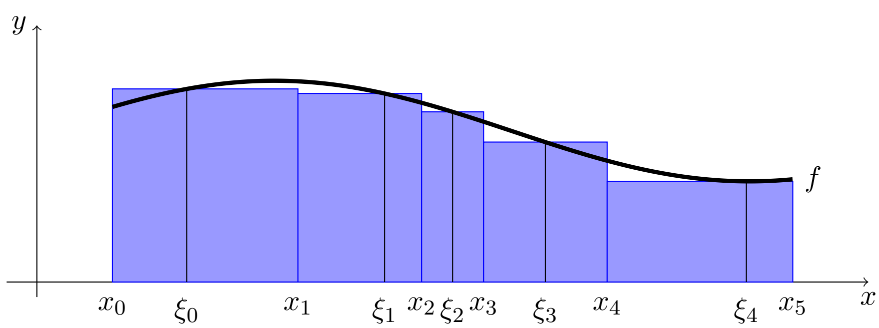
nazýváme *výběrem z dělicích intervalů při dělení D*; stručně: *výběr při D* (označujeme $V \sqsubset D$).

Definice 9.16 Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničená na intervalu $[a, b]$, $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a, b])$, $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ je výběr při D. Číslo

$$i(f, D, V) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

nazýváme *Riemannovým integrálním součtem funkce f při dělení D a výběru V.*

Poznámka 9.17 Podobně jako dolní a horní integrální součet, integrální součet $i(f, D, V)$ má jednoduchý geometrický význam. Je-li f nezáporná, jde opět o součet obsahů jistých obdélníků – viz Obrázek 9.4.



Obrázek 9.4: Geometrický význam integrálních součtů $i(f, D, V)$.

Lemma 9.18. *Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničená funkce na $[a, b]$. Pak pro každé dělení $D \in \mathfrak{D}([a, b])$ a každý výběr V při D platí*

$$s(f, D) \le i(f, D, V) \le S(f, D).$$

Důkaz. Nechť $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $V = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \sqsubset D$. Pro $i = 1, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \le f(\xi_i) \le \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = M_i.$$

Vynásobíme-li tyto nerovnosti výrazem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes všechna $i = 1, \ldots, n$, dostáváme dokazované nerovnosti. $\square$

Definice 9.19 Nechť $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Tuto posloupnost nazýváme *nulovou*, jestliže

$$\lim_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0.$$

Věta 9.20. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkce na $[a, b]$ a $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Pak*

$$\lim_{m\to\infty} s(f, D_m) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad a \quad \lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li navíc funkce f integrovatelná na $[a, b]$, pak

$$\lim_{m\to\infty} i(f, D_m, V_m) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde V_m je libovolný výběr při dělení D_m pro každé $m \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Uvažujme nulovou posloupnost dělení $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle Lemmatu 9.13 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathfrak{D}([a, b])$ takové, že $\nu(D) < \delta$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq s(f, D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon,$$

odkud plyne

$$\left| s(f, D) - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

K tomuto δ existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m \geq m_0$ platí $\nu(D_m) < \delta$. Proto pro všechna $m \geq m_0$ platí

$$\left| s(f, D_m) - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $s(f, D_m) \to \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Podobně dokážeme pro horní součty a integrál. Nechť nyní f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, tzn.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Podle Lemmatu 9.18 platí

$$s(f, D_m) \leq i(f, D_m, V_m) \leq S(f, D_m)$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$, kde $V_m \sqsubset D_m$ je zcela libovolný výběr z dělicích intervalů dělení D_m. Odtud pak z první části této věty a z věty o třech limitách (Věta 3.47) plyne požadovaná rovnost. □

Příklad 9.21 Vypočtěte integrály

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$

Řešení. Obě funkce x a x^2 jsou rostoucí na $[0,1]$, a jak se dozvíme ve Větě 9.27, jsou také integrovatelné na $[0,1]$. Hodnoty integrálu vypočítáme s využitím Věty 9.20.
ad (a): Uvažujme posloupnost ekvidistantních dělení intervalu $[0,1]$, tzn. posloupnost ekvidistantních dělení $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ o m dělicích intervalech. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$D_m = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}, \quad x_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

a $\nu(D_m) = \frac{1}{m}$. Jde tedy o nulovou posloupnost dělení. Definujme navíc pro každé $m \in \mathbb{N}$ výběr z dělicích intervalů dělení D_m takto

$$V_m = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}, \quad \xi_j = x_j = \frac{j}{m}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Pak

$$i(x, D_m, V_m) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{j}{m}\right) \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{m} j = \frac{1}{m^2} \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m+1}{2m},$$

kde jsme využili výsledku z Příkladu 1.67. Podle Věty 9.20 dostáváme

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} i(x, D_m, V_m) = \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Výsledek by nás neměl příliš překvapit, protože geometrický význam tohoto integrálu je obsah pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách délky 1.
ad (b): Uvažujme stejnou posloupnost ekvidistantních dělení intervalu $[0,1]$ a k nim stejné příslušné výběry z dělicích intervalů. Pak

$$i(x^2, D_m, V_m) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{j}{m}\right)^2 \frac{1}{m} = \frac{1}{m^3} \sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{1}{m^3} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{(m+1)(2m+1)}{6m^2},$$

kde jsem využili výsledku z Cvičení 1.68. Podle Věty 9.20 dostáváme

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} i(x^2, D_m, V_m) = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)(2m+1)}{6m^2} = \frac{1}{3}.$$

Geometrický význam integrálních součtů $i(f, D_m, V_m)$ pro $m = 11$ je ukázán na Obrázku 9.5.

○

V předchozím příkladu byly pro výpočet zásadní součtové vzorce. Pokud ale příslušné součtové vzorce nemáme, je možné vypočítat hodnotu integrálu alespoň přibližně, např.

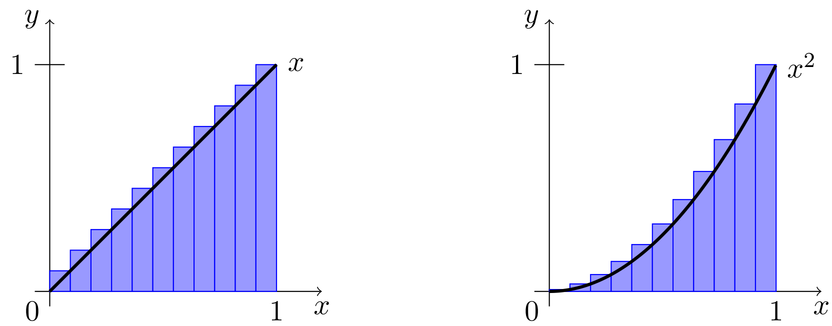
$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx i(f, D_m, V_m)$$

pro nějaké dostatečně velké m.

K určení přesné hodnoty Riemannova integrálu naštěstí máme velmi efektivní vzorec, jde o veledůležitý *Leibnizův–Newtonův vzorec.*

Věta 9.22 (Leibnizova–Newtonova formule)**.** *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je primitivní k funkci f na (a,b) a spojitá na $[a,b]$. Pak*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$



(a) Funkce $f(x) = x$ na intervalu $[0, 1]$. (b) Funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$.

Obrázek 9.5: Graf funkce a geometrický význam integrálních součtů z Příkladu 9.21.

Důkaz. Buď $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a, b])$ libovolné. Funkce F splňuje na každém dělicím intervalu všechny podmínky Lagrangeovy věty, a podle ní pak pro každé $k = 1, \ldots, n$ existuje $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tak, že

$$F'(c_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}},$$

tzn.

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Pak

$$\sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = i(f, D, V),$$

kde $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ je výběr při dělení D, ale také platí

$$\sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots$$
$$+ \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Tedy pro všechna $D \in \mathfrak{D}([a, b])$ existuje výběr V při D takový, že platí

$$i(f, D, V) = F(b) - F(a).$$

Zvolme nulovou posloupnost $\{D_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}([a, b])$ a $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$ tak, že $V_m \sqsubset D_m$ a

$$i(f, D_m, V_m) = F(b) - F(a)$$

pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Podle Věty 9.20 platí

$$i(f, D_m, V_m) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{pro } m \to \infty$$

a protože $\{i(f, D_m, V_m)\}_{m=1}^{\infty}$ je konstantní posloupnost jejíž členy jsou rovny $F(b) - F(a)$, zřejmě

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Poznámka 9.23 Rozdíl funkčních hodnot $F(b) - F(a)$ se zapisuje krátce výrazem

$$[F(x)]_a^b .$$

Rovnost z předchozí věty pak stručně zapisujeme jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b .$$

Toto značení oceníme pro primitivní funkce se složitým předpisem.

Jak je vidět, možnost použití Leibnizova–Newtonova vzorce stojí a padá se znalostí primitivní funkce.

Nyní, když máme k dispozici velmi efektivní metodu počítání přesné hodnoty Riemannova integrálu, ukažme si nějaký jednoduchý příklad.

Příklad 9.24 Vypočtěte integrály

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$, (b) $\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$, (c) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$, (d) $\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože již víme, že primitivní k funkci sinus je funkce $-\cos$, snadno vypočítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Podobně dostáváme také

$$\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -2 \quad \text{a} \quad \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Poučný je také geometrický význam těchto integrálů, viz Obrázek 9.6. ○

9.2 Podmínky integrovatelnosti

Často budeme vyslovovat věty mající ve svých předpokladech integrovatelnost funkcí. Je proto důležité znát jednoduchá pravidla, pomocí kterých to poznáme. Začneme nutnou a postačující podmínkou, kterou prakticky používat nebudeme, ovšem je velmi užitečná pro důkazy dalších – efektivnějších – kriterií integrovatelnosti.

Lemma 9.25. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$ právě tehdy, když*

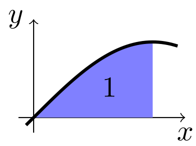
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathfrak{D}([a, b])\ :\ S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. ($\Leftarrow$): Nechť platí podmínka, tzn. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathfrak{D}([a, b])$ tak, že

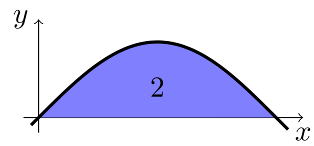
$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Z libovolnosti $\varepsilon > 0$ plyne

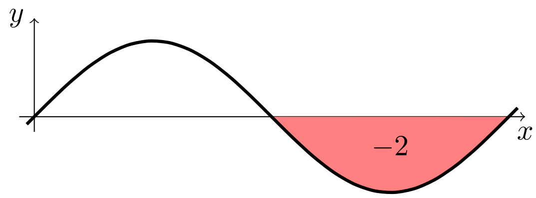
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$



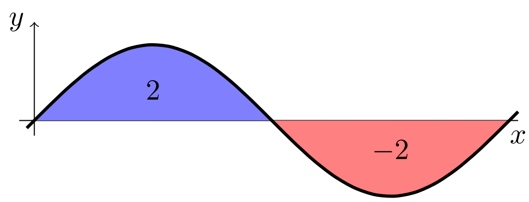
(a) Integrál funkce sin přes interval $[0, \pi/2]$.



(b) Integrál funkce sin přes interval $[0, \pi]$.



(c) Integrál funkce sin přes interval $[\pi, 2\pi]$.



(d) Integrál funkce sin přes interval $[0, 2\pi]$.

Obrázek 9.6: Geometrický význam integrálů z Příkladu 9.24.

tedy $f \in \mathcal{R}([a, b])$.
($\Rightarrow$): Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle definice dolního a horního integrálu (a Věty 2.24) existují $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$ tak, že

$$s(f, D_1) > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(f, D_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $D = D_1 \cup D_2$. Pak podle Lemmatu 9.7(b) dostáváme

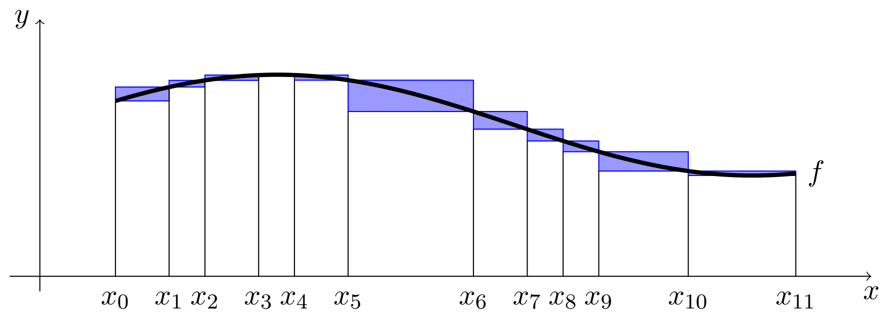
$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) \leq S(f, D_2) - s(f, D_1) &< \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Poznámka 9.26 Podmínka v Lemmatu 9.25 má pěkný geometrický význam. Říká, že k libovolně zvolenému (malému) $\varepsilon > 0$ lze najít takové, dělení, že (nezáporný) rozdíl

$$S(f, D) - s(f, D)$$

je menší než ε. Přitom, tento rozdíl je součtem jistých obdélníků pokrývajících graf funkce f, viz Obrázek 9.7.



Obrázek 9.7: Geometrický význam rozdílu $S(f, D) - s(f, D)$ z Lemmatu 9.25.

Věta 9.27. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f je na $[a, b]$ neklesající. Zřejmě $f(a) \le f(b)$. Kdyby $f(a) = f(b)$, pak z monotonie plyne, že f je konstantní, tedy f je integrovatelná na $[a, b]$ – viz Příklad 9.12(a). Nechť $f(a) < f(b)$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a, b])$ takové, že

$$\nu(D) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Takové dělení lze vždy najít – viz např. Poznámku 9.4(b). Kromě toho, vzhledem k monotonii funkce f na $[a, b]$, platí

$$f(x_{i-1}) = \min_{[x_{i-1},x_i]} f = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \le \sup_{[x_{i-1},x_i]} f = \max_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i)$$

pro každé $i = 1, \ldots, n$. Pak

$$\begin{aligned}
S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \; (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \; (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{\ge 0}(x_i - x_{i-1}) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\, \nu(D) \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_1) - f(x_0) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Věta 9.28. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Důkaz. Ze spojitosti f na $[a,b]$ plyne ohraničenost a stejnoměrná spojitost f na $[a,b]$ (viz Větu 5.82 a 5.88). Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, x' \in [a,b]$ platí

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{9.1}$$

Zvolme $D = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a,b])$ tak, že $\nu(D) < \delta$. Ze spojitosti dále plyne existence $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tak, že

$$f(\xi_k) = \max_{[x_{k-1},x_k]} f = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f, \quad f(\eta_k) = \min_{[x_{k-1},x_k]} f = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$$

pro všechna $k = 1, \ldots, n$. Protože

$$|\xi_k - \eta_k| \le x_k - x_{k-1} \le \nu(D) < \delta,$$

platí podle (9.1) nerovnost

$$|f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Pak

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[f(\xi_k) - f(\eta_k)\right](x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Věta 9.29. *Má-li ohraničená funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ konečný počet bodů nespojitosti, pak $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Důkaz. Nejprve označme $M = \sup_{[a,b]} f$. Důkaz bude opět založen na použití Lemmatu 9.25. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K němu nalezneme takové dělení D intervalu $[a,b]$, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Nejprve pokryjeme body nespojitosti—včetně krajních bodů, protože značení pak bude jednodušší—dělicími intervaly dostatečně malé délky $[a_i, b_i]$. Uvažujme množinu

$$A = \{t \in [a,b] \; ; \text{ funkce } f \text{ má v bodě } t \text{ nespojitost}\} \cup \{a,b\}.$$

Protože jde o konečnou množinu, označme

$$A = \{t_1, \ldots, t_m\}, \quad \text{kde } a = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ke každému $i = 1, \ldots, m$ označme

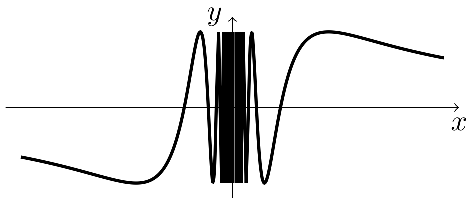
$$a_i = \begin{cases} t_i & \text{je-li } t_i = a, \\ t_i - \delta & \text{je-li } t_i > a, \end{cases} \qquad b_i = \begin{cases} t_i & \text{je-li } t_i = b, \\ t_i + \delta & \text{je-li } t_i < b, \end{cases}$$

kde $\delta > 0$ vezmeme tak malé, že
$$\delta < \frac{\varepsilon}{8Mm}$$
a $b_i < a_{i+1}$ pro $i = 1, \dots, m-1$. Tedy množina
$$D' = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m\}$$
je dělení intervalu $[a, b]$ a pro $i = 1, \dots, m$ platí
$$b_i - a_i \leq 2\delta.$$
Ještě ale nejde o hledané dělení D. Jen intervaly $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, m$ použijeme jako dělicí body výsledného dělení. Totiž, zbývající dělicí intervaly dělení D', což jsou intervaly tvaru $[b_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$, ještě nejsou dostatečně krátké. Na druhou stranu, na těchto intervalech je funkce f spojitá, tedy podle Věty 9.28 riemannovsky integrovatelná a konečně podle Lemmatu 9.25 existuje dělení D_i intervalu $[b_i, a_{i+1}]$ takové, že
$$S(f, D_i) - s(f, D_i) < \frac{\varepsilon}{2m}$$
pro všechna $i = 1, \dots, m-1$. Nyní konečně položme
$$D = D' \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i = \{a_1, b_1\} \cup \{a_2, b_2\} \cup \ldots \cup \{a_m, b_m\} \cup D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_{m-1}.$$
Zřejmě $D \in \mathfrak{D}([a, b])$. Navíc platí
$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sup_{[a_j, b_j]} f - \inf_{[a_j, b_j]} f \right) (b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{m-1} S(f, D_i) - s(f, D_i) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} 2M \cdot 2\delta + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2m} \leq 4Mm\delta + \frac{\varepsilon}{2m}(m-1) \\ &< 4\delta Mm \frac{\varepsilon}{8Mm} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{m-1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$
kde jsme v druhé nerovnosti použili následující odhad
$$\sup_{[a_j, b_j]} f - \inf_{[a_j, b_j]} f \leq \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \leq \sup_{[a,b]} |f| + \sup_{[a,b]} |f| = 2M. \qquad \square$$

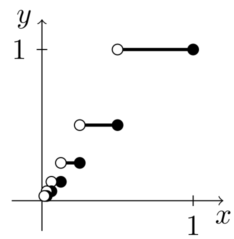
Příklad 9.30

(a) Funkce
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
je integrovatelná na intervalu $[-k, k]$, kde $k > 0$ je libovolná reálná konstanta. Plyne to z faktu, že je ohraničená a má jediný bod nespojitosti – viz Obrázek 9.8.

(b) Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) = [0, 1]$ definovaná předpisem
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
je opět integrovatelná na intervalu $[0, 1]$. Je totiž na něm neklesající – viz Obrázek 9.8.



(a) Funkce z části (a).



(b) Funkce z části (b).

Obrázek 9.8: Grafy funkcí z Příkladu 9.30.

Může se nám hodit následující věta.

Věta 9.31. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou ohraničené na $[a, b]$ a liší se v nejvýše konečném počtu bodů. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{R}([a, b])$. Je-li $f \in \mathcal{R}([a, b])$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Důkaz rozdělme do tří kroků.
Krok 1 : Uvažujme funkci

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [a, b].$$

Pak podle předpokladu $h(x) = 0$ pro všechna $x \in [a, b]$ až na konečnou množinu bodů. Protože nulová (tedy konstantní) funkce je spojitá na $[a, b]$, funkce h je spojitá až na konečný počet bodů nespojitosti. Podle Věty 9.29 pak je funkce h riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.
Krok 2 : Dokažme nyní, že $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Uvažujme nulovou posloupnost ekvidistantních dělení $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ a k nim příslušné výběry $V_m \sqsubset D_m$ tak, že žádná množina V_m neobsahuje body nespojitosti funkce h. To lze vždy zařídit, protože bodů nespojitosti je konečně mnoho. Pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$i(h, D_m, V_m) = 0$$

a tedy podle Věty 9.20 platí

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} i(h, D_m, V_m) = 0.$$

Krok 3 : Nechť nyní $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Protože

$$f = g + h,$$

pak s využitím Lemmatu 9.36 (které jsme ještě nedokazovali, ale jeho důkaz je zcela nezávislý na Větě 9.31, tedy nehrozí důkaz kruhem) dostáváme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x) + h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Příklad 9.32 Zjistěte, zda je funkce $|\operatorname{sgn}|$ riemanovsky integrovatelná na intervalu $[-1,1]$. Pokud ano, vypočtěte integrál této funkce přes tento interval.

Řešení. Nakreslíme-li si graf restrikce funkce $|\operatorname{sgn}|$ na interval $[-1,1]$, vidíme, že jde o funkci spojitou až na bod $x=0$. Podle Věty 9.29 je $|\operatorname{sgn}|$ integrovatelná přes $[-1,1]$. Vidíme, že se tato funkce liší od funkce

$$f(x)=1, \quad x\in[-1,1]$$

pouze v bodě 0. Podle Věty 9.31 a Příkladu 9.12(a) dostáváme

$$\int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 2.$$

○

Poznámka 9.33 Na závěr poznamenejme, že se Věta 9.29, resp. Věta 9.31 dá zobecnit tak, že množina bodů nespojitosti, resp. bodů nerovnosti může být i nekonečná. Konkrétně to může být tzv. množina nulové Jordanovy míry: *Řekneme, že množina $A\subset\mathbb{R}$ je nulové Jordanovy míry, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje konečná množina otevřených intervalů $\{(a_k,b_k)\ ;\ k=1,\dots,n\}$ tak, že*

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k) \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\varepsilon.$$

Řečeno více lidsky, množina nulové Jordanovy míry je taková, dá-li se „pokrýt“ konečně mnoha otevřenými intervaly o libovolně malém součtu jejich délek. Jak již bylo naznačeno, kromě konečných množin reálných čísel mohou být množinami nulové Jordanovy míry i nekonečné. Ty ale musejí být „dostatečně řídké“. Např. množina

$$\left\{\frac{1}{n}\ ;\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

je množinou nulové Jordanovy míry, ale množina

$$\mathbb{Q}\cap[0,1]$$

již ne – nakreslete na reálné ose. Další informace včetně důkazů lze najít např. v [4].

9.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

Nyní se dostáváme k základním vlastnostem Riemannova integrálu. Mnohé tyto vlastnosti mají i jiné typy integrálů, se kterými se v budoucnu ještě setkáme.

Věta 9.34. *Nechť $f\in\mathcal{R}([a,b])$, $c,d\in\mathbb{R}$ jsou taková, že*

$$c\le f(x)\le d \quad \textit{pro všechna } x\in[a,b].$$

Pak

$$c(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le d(b-a).$$

Důkaz. Pro každé dělení $D \in \mathfrak{D}([a,b])$ platí podle Lemmatu 9.7(a) a definice horního a dolního integrálu

$$c(b-a) \leq s(f,D) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f,D) \leq d(b-a).$$

□

Důsledek 9.35. *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak*

1. *je-li $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in [a,b]$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$,*
2. *je-li $|f(x)| \leq c$ pro všechna $x \in [a,b]$, pak $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq c(b-a)$.*

Lemma 9.36. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Uvažujme $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a,b])$, označme

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad n_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g, \quad p_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} (f+g)$$

pro $i = 1, \ldots, n$. Protože

$$m_i + n_i \leq f(x) + g(x)$$

pro každé $x \in [x_{i-1}, x_i]$, je číslo $m_i + n_i$ dolní závora množiny $\{f(x)+g(x)\ ;\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, odkud vyplývá, že

$$m_i + n_i \leq p_i.$$

Vynásobíme-li poslední nerovnost výrazem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme výsledné nerovnosti přes všechna $i = 1, \ldots, n$, dostaneme nerovnost

$$s(f,D) + s(g,D) \leq s(f+g,D).$$

Uvažujme $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ nulovou posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s(f,D_m) + s(g,D_m) \leq s(f+g,D_m)$$

Vzhledem k integrovatelnosti funkcí f a g na $[a,b]$ a Větě 9.20 platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobnou úvahou se dokáže nerovnost i pro horní Riemannův integrál součtu funkcí f a g přes interval $\mathfrak{D}([a,b])$, konkrétně

$$\overline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Dáme-li poslední dvě nerovnosti dohromady s pomocí Poznámky 9.10, pak dostáváme nejen, že $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$, ale také rovnost z tvrzení věty. □

Lemma 9.37. *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak $cf \in \mathcal{R}([a,b])$ a*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Pro $c = 0$ je tvrzení zřejmé. Nechť $c > 0$. Nechť $D \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a,b])$ a označme

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad n_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} c \cdot f$$

pro $i = 1, \ldots, n$. Pak protože

$$cm_i \leq cf(x)$$

pro každé $x \in [x_{i-1}, x_i]$, je číslo cm_i dolní závora množiny $\{cf(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, odkud vyplývá, že

$$cm_i \leq n_i.$$

Vynásobíme-li obě strany rovnosti výrazem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a vytkneme c na levé straně, dostáváme nerovnost

$$c \cdot s(f, D) \leq s(c \cdot f, D).$$

Uvažujme $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ nulovou posloupnost dělení intervalu $[a, b]$. Pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$c \cdot s(f, D_m) \leq s(c \cdot f, D_m).$$

Vzhledem k integrovatelnosti funkce f na $[a, b]$ a Větě 9.20 platí

$$c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobnou úvahou se dokáže nerovnost i pro horní Riemannův integrál součtu funkcí f a g přes interval, konkrétně

$$\overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x \leq c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dáme-li poslední dvě nerovnosti dohromady s pomocí Poznámky 9.10, pak dostáváme nejen, že $c \cdot f \in \mathcal{R}([a,b])$, ale také rovnost z tvrzení věty.
Nechť nyní $c < 0$. Důkaz je veden téměř stejně jako pro kladné c. Hlavní rozdíl spočívá v tom, že pro každé dělení $D \in \mathfrak{D}([a,b])$ platí nerovnosti

$$c \cdot S(f, D) \leq s(c \cdot f, D) \quad \text{a} \quad S(c \cdot f, D) \leq c \cdot s(f, D),$$

které je také třeba dokázat. □

Následující větu lze snadno dokázat s pomocí předchozích dvou lemmat matematickou indukcí.

Věta 9.38. *Nechť $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{R}([a,b])$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $c_1f_1 + \ldots + c_nf_n \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b c_1f_1(x) + \ldots + c_nf_n(x)\,\mathrm{d}x = c_1\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 9.39. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in [a,b]$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Uvažujme pomocnou funkci

$$h(x) = g(x) - f(x), \quad x \in [a,b].$$

Podle předpokladu je funkce h nezáporná. Z Důsledku 9.35 a Věty 9.38 dostáváme

$$0 \le \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je věta dokázána. □

Lemma 9.40. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na množině $M \subset \mathbb{R}$. Pak*

$$\sup_M |f| - \inf_M |f| \le \sup_M f - \inf_M f.$$

Důkaz. Označme $g = \inf_M f$ a $G = \sup_M f$. Protože $g \le f(x) \le G$ pro každé $x \in M$, pak okamžitě dostáváme nerovnosti

$$G - g \le f(x) - f(y) \le G - g,$$

pro každé $x, y \in M$. S využitím Příkladu 2.44 (konkrétně jde o nerovnosti (g) a (i)) máme pro každé $x, y \in M$

$$|f(x)| - |f(y)| \le \big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)| \le G - g.$$

Odtud tedy máme

$$|f(x)| \le |f(y)| + G - g$$

pro každé $x, y \in M$, na což se dá dívat tak, že pro každé $y \in M$ je číslo $|f(y)| + G - g$ horní závorou množiny $\{|f(x)| \ ; \ x \in M\}$. Podle definice suprema pak dostáváme, že

$$\sup_M |f| \le |f(y)| + G - g,$$

a to pro každé $y \in M$. Jednoduchou úpravou poslední nerovnosti dostáváme

$$\sup_M |f| - (G - g) \le |f(y)|$$

pro každé $y \in M$, na což se dá dívat tak, že číslo $\sup_M |f| - (G - g)$ je dolní závorou množiny $\{|f(x)| \ ; \ x \in M\}$. Podle definice infima pak dostáváme, že

$$\sup_M |f| - (G - g) \le \inf_M |f|.$$

To je žádaná nerovnost. □

Věta 9.41. *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle Lemmatu 9.25 existuje $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a,b])$ tak, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Označíme-li

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad n_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} |f|, \quad N_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} |f|,$$

pak podle Lemmatu 9.40 platí

$$N_i - n_i \leq M_i - m_i$$

pro každé $i = 1, \ldots, n$. Vynásobením $(x_i - x_{i-1})$ a sečtením přes všechna $i = 1, \ldots, n$ dostáváme

$$S(|f|,D) - s(|f|,D) = \sum_{i=1}^n (N_i - n_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Podle Lemmatu 9.25 platí $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$. Navíc, protože

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

pro každé $x \in [a,b]$, pak z Věty 9.39 a Lemmatu 9.37 dostáváme

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

Odtud již s využitím Cvičení 2.44(g) dostáváme nerovnost z tvrzení. □

Věta 9.42. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak $fg \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Důkaz. Integrovatelnost součinu rozdělíme do tří fází:
KROK 1. *Nejprve dokažme, že pro nezápornou $f \in \mathcal{R}([a,b])$ platí $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$:* Z ohraničenosti f plyne, že existuje $M > 0$ takové, že $f(x) \leq M$ pro každé $x \in [a,b]$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle Lemmatu 9.25 existuje $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathfrak{D}([a,b])$ takové, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Pro každé $i = 1, \ldots, n$ označme

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad n_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f^2, \quad N_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f^2.$$

Protože

$$0 \leq m_i \leq f(x) \leq M_i \leq M \quad \text{pro každé } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

pak také

$$0 \leq m_i^2 \leq f^2(x) \leq M_i^2 \quad \text{pro každé } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

z čehož plyne, že $m_i^2 \leq n_i$ a $N_i \leq M_i^2$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Konečně

$$\begin{aligned}
S(f^2, D) - s(f^2, D) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (N_i - n_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i + m_i)(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= 2M \left(\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \right) \\
&= 2M \left(S(f, D) - s(f, D) \right) < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle Lemmatu 9.25 je f^2 riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.
KROK 2. *Dokažme, že pro každou $f \in \mathcal{R}([a, b])$ platí $f^2 \in \mathcal{R}([a, b])$:* Pro $f \in \mathcal{R}([a, b])$ platí podle Věty 9.41, že také $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$. Protože $|f|$ je zároveň nezáporná, pak s využitím předchozího kroku dostáváme $f^2 = |f|^2 \in \mathcal{R}([a, b])$.
KROK 3. *Dokažme samotné tvrzení:* Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak na intervalu $[a, b]$ platí

$$(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2,$$

a tedy

$$fg = \frac{1}{2} \left[(f + g)^2 - f^2 - g^2 \right].$$

Podle kroku 2 a Věty 9.38 již víme, že f^2, g^2, $(f + g)^2 \in \mathcal{R}([a, b])$ a konečně také $fg \in \mathcal{R}([a, b])$. □

Věta 9.43. *Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $[c, d] \subset [a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([c, d])$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle Lemmatu 9.25 existuje $D_1 \in \mathfrak{D}([a, b])$ takové, že

$$S(f, D_1) - s(f, D_1) < \varepsilon.$$

Položme $D_2 = D_1 \cup \{c, d\}$. Pak $D_2 \in \mathfrak{D}([a, b])$ a $D_1 \subset D_2$, tedy podle Lemmatu 9.7(b) platí

$$S(f, D_2) - s(f, D_2) \leq S(f, D_1) - s(f, D_1) < \varepsilon.$$

Nakonec položme $D = D_2 \cap [c, d]$. Není obtížné ověřit, že $D \in \mathfrak{D}([c, d])$. Navíc, označíme-li $D_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, pak existují $k, \ell \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < \ell \leq n$ takové, že $x_k = c$ a $x_\ell = d$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=k+1}^{\ell} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=k+1}^{\ell} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=k+1}^{\ell} m_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, D_2) - s(f, D_2) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $M_i - m_i \geq 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Věta 9.44 (aditivita integrace vzhledem k mezi)**.** *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$. Je-li $f \in \mathcal{R}([a,c])$ a $f \in \mathcal{R}([c,b])$, pak $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Snadno vidíme, že jsou-li $D' \in \mathfrak{D}([a,c])$ a $D'' \in \mathfrak{D}([c,b])$ pak $D = D' \cup D'' \in \mathfrak{D}([a,b])$, $\nu(D) = \max\{\nu(D'), \nu(D'')\}$ a

$$s(f,D) = s(f,D') + s(f,D'') \quad \text{a} \quad S(f,D) = S(f,D') + s(f,D'').$$

Máme-li tedy nulovou posloupnost dělení $\{D'_m\}_{m=1}^{\infty}$ intervalu $[a,c]$ a nulovou posloupnost dělení $\{D''_m\}_{m=1}^{\infty}$ intervalu $[c,b]$, pak pro $D_m = D'_m \cup D''_m$ platí, že $D_m \in \mathfrak{D}([a,b])$, posloupnost dělení $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ je nulová a

$$s(f,D_m) = s(f,D'_m) + s(f,D''_m) \quad \text{a} \quad S(f,D_m) = S(f,D'_m) + s(f,D''_m).$$

Odtud přechodem pro $m \to \infty$ s použitím Věty 9.20 dostáváme, že

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Závěr již plyne z definice integrálu. $\square$

Dejme smysl symbolu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i pro $a \geq b$. Usnadní nám to život.

Definice 9.45 Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$ definujeme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pro $f \in \mathcal{R}([a,b])$ definujeme

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Díky tomuto značení lze provést užitečné zobecnění Věty 9.44.

Věta 9.46. *Nechť $f \in \mathcal{R}([\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}])$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Je potřeba vyšetřit všechny možnosti nerovností mezi a, b a c. Případ $a < c < b$ je dokázán již ve Větě 9.44. Předpokládejme dále, že $a < b < c$. Podle Věty 9.44 pak platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

přičemž druhá rovnost platí vhledem k Definice 9.45. Ostatní případy se dokáží podobně (včetně neostrých nerovností, u kterých vzniknou integrály se stejnou horní a dolní mezí). □

Poznámka 9.47 Podle Definice 9.45 pak pro každou funkci $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $x, y \in [a,b]$ platí

$$\left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|-\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|,$$

tedy vyměníme-li v integrálu meze, jeho absolutní hodnota se nezmění. Platí tedy například následující zobecnění vzorce z Věty 9.41: *Pro $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a každé $c, d \in [a,b]$ platí*

$$\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_c^d |f(x)|\,\mathrm{d}x\right|.$$

9.4 Integrál jako funkce horní meze

Nyní si ukažme další způsob, jak definovat nové funkce z již známých.

Definice 9.48 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $c \in J$ a f je na každém uzavřeném ohraničeném podintervalu intervalu J riemannovsky integrovatelná. Pak funkci $F_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{pro všechna } x \in J$$

nazýváme *integrálem jako funkce horní meze* funkce f.

Poznámka 9.49

(a) Je-li $x > c$, pak $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je R–integrál, pro $x \leq c$ je tento výraz definován v Definici 9.45. Například, je-li $f(x) = x^2$, $c = 0$, pak

$$F_0(x) = \begin{cases} \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = x^3/3 & \text{pro } x > 0, \\ \int_0^0 t^2\,\mathrm{d}t = 0 & \text{pro } x = 0, \\ \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 t^2\,\mathrm{d}t = -[-x^3/3]_0^1 = x^3/3 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Zde například vidíme, že F_0 je primitivní funkce k funkci f. Je to náhoda nebo pravidlo? Uvidíme dále.

(b) Funkce f z Definice 9.48 je tedy vzhledem k Větě 9.43 riemanovsky integrovatelná na každém $[c,d] \subset J$.

(c) Z Definice 9.45 okamžitě vyplývá, že

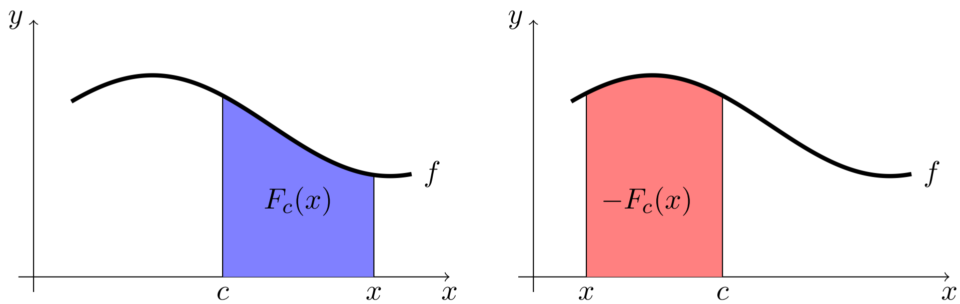
$$F_c(c) = 0.$$

(d) Je důležité si uvědomit geometrický význam funkční hodnoty funkce F_c. To plyne okamžitě z její definice, např. pro nezápornou (integrovatelnou) funkci f na intervalu J a $x \in J$ platí:

(i) je-li $x > c$ je $F_c(x)$ obsah podgrafu funkce f na intervalu $[c, x]$,

(ii) je-li $x < c$ je $F_c(x)$ číslo opačné k hodnotě obsahu podgrafu funkce f na intervalu $[x, c]$,

viz Obrázek 9.9. Rozmyslete již sami, jak je to pro nekladnou funkci f.



Obrázek 9.9: Geometrický význam funkční hodnoty funkce F_c pro $x \neq c$.

Věta 9.50. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ je interval $c \in J$ a F_c je definovaná v Definici 9.48 (tzn. $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je definován pro všechna $x \in J$). Pak*

(a) F_c je spojitá na J,

(b) je-li f spojitá v $x_0 \in J$, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$ (přitom, je-li x_0 krajním bodem intervalu J a spojitost je tak pouze jednostranná, existuje v daném bodě také jen příslušná jednostranná derivace a ta je rovna funkční hodnotě funkce f).

Důkaz. ad (a): Nechť $x_0 \in J$ není pravým krajním bodem intervalu J. Dokažme, že F_c je spojitá v bodě $x_0 \in J$ zprava. Nejprve si proveďme pár přípravných úvah a výpočtů. Zřejmě existuje interval $[x_0, x_0 + \delta_1]$, který je podintervalem J. A pro každé $x \in [x_0, x_0 + \delta_1]$ pak s využitím Věty 9.46 platí

$$\begin{aligned} F_c(x) - F_c(x_0) &= \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Z předpokladu integrovatelnosti funkce f na $[x_0, x_0 + \delta_1]$ a je na něm tedy i ohraničená; označme

$$M = \sup_{[x_0, x_0+\delta_1]} |f|.$$

Konečně se pusťme do samotného důkazu. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K němu stačí zvolit

$$0 < \delta < \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{M}\},$$

protože pak pro každé $x \in \mathcal{U}_\delta^+(x_0)$ platí

$$\begin{aligned}|F_c(x) - F_c(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le M(x - x_0)\\ &< M\delta < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,\end{aligned}$$

kde jsme postupně použili (9.2), Větu 9.41, Důsledek 9.35 a Příklad 9.12(a). Tím jsme dokázali, že F_c je v bodě x_0 spojitá zprava. Podobně se dokáže spojitost zleva funkce F_c v každém bodě $x_0 \in J$, který není levým krajním bodem intervalu J.
ad (b): Nechť f je spojitá zprava v bodě $x_0 \in J$. Dokažme, že $(F_c)'_+(x_0) = f(x_0)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K němu vzhledem ke spojitosti f existuje $\mathcal{U}_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$ takové, že pro všechna $t \in \mathcal{U}_\delta^+(x_0)$ platí

$$|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak pro každé $x \in \mathcal{U}_\delta^+(x_0)$ platí

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - (x - x_0)f(x_0)\right|\\ &= \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right|\\ &\le \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{x - x_0}\frac{\varepsilon}{2}(x - x_0) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy

$$(F_c)'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Obdobně se dokáže, že $(F_c)'_-(x_0) = f(x_0)$ za předpokladu, že f je spojitá v bodě $x_0 \in J$ zleva. Důkaz korunujeme použitím Věty 6.7(ii). □

Důsledek 9.51. *Nechť f spojitá na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, $c \in J$. Pak funkce F_c z Definice 9.48 je primitivní k f na J.*

Věta 9.52 (o existenci primitivní funkce)**.** *Je-li f spojitá na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, pak k ní existuje primitivní funkce na J. Navíc všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu J jsou ve tvaru*

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + C,$$

kde $c \in J$, $C \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak podle Věty 9.28 je f riemannovsky integrovatelná na každém ohraničeném uzavřeném podintervalu intervalu J. Proto lze pro každé $c \in J$ definovat funkci jako integrál horní meze F_c, a to na celém J. To je ale podle Důsledku 9.51 primitivní funkce k f na J. Podle Věty 8.6 jsou funkce $F_c + C$ právě všechny primitivní funkce k funkci f na J, kde C probíhá všechna reálná čísla. □

Poznámka 9.53 Z Věty 9.52 by se mohlo zdát, že mezi primitivními funkcemi a integrály jako funkcemi horní meze existuje vzájemně jednoznačný vztah. To platí ale pouze pro primitivní funkce a integrály spojitých funkcí. Např. funkce sgn primitivní funkci na $\mathbb{R}$ nemá, nicméně integrál této funkce jako funkce horní meze (pro $c = 0$) definovaný je na celém $\mathbb{R}$, a platí

$$F_c(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t \, \mathrm{d}t = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ověřte!

Cvičení 9.54 Pomocí Věty 9.50 dokažte Leibnizův–Newtonův vzorec, tzn. Větu 9.22.

9.5 Věty o střední hodnotě

Stejně jako diferenciální, tak i integrální počet má své věty o střední hodnotě.

Věta 9.55 (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $g(x) \geq 0$ pro všechna $x \in [a, b]$. Pak existuje $c \in \left[\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f\right]$ tak, že*

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = c \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Je-li navíc f spojitá na $[a, b]$, pak existuje $\xi \in [a, b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme

$$m = \inf_{[a,b]} f, \quad M = \sup_{[a,b]} f.$$

Pak pro všechna $x \in [a, b]$ zřejmě

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Z nezápornosti g pak také pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Z Věty 9.39 a Lemmatu 9.37 plyne, že

$$m \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x. \tag{9.3}$$

Protože g je nezáporná funkce, podle Důsledku 9.35 pak

$$G = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

Jsou dvě možnosti: $G = 0$ nebo $G > 0$. Pokud $G = 0$, z (9.3) plyne, že také $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. V tomto případě lze zvolit za c cokoliv z intervalu $[m, M]$, a stejně tak lze zvolit za ξ jakýkoliv bod z $[a, b]$. Nechť $G > 0$. Pak rovnici (9.3) lze podělit číslem G a dostáváme tak

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Za c zvolme podíl z předchozích dvou nerovností. Zřejmě je to hledaná konstanta z tvrzení věty. Nechť navíc f je spojitá. Pak z Věty 5.82(b) plyne existence $\alpha, \beta \in [a, b]$ tak, že $M = f(\alpha)$, $m = f(\beta)$. Je-li $c = m$, resp. $c = M$, pak lze položit $\xi = \beta$, resp. $\xi = \alpha$. Pokud $c \in (m, M)$, pak z Věty 5.91 plyne, že existuje ξ ležící mezi α a β, tzn. $\xi \in [a, b]$ takové, že $f(\xi) = c$. $\square$

Důsledek 9.56. *Je-li $f \in \mathcal{R}([a, b])$, pak existuje $c \in \left[\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f\right]$ a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b - a).$$

Je-li navíc f spojitá na $[a, b]$, pak existuje $\xi \in [a, b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a)$$

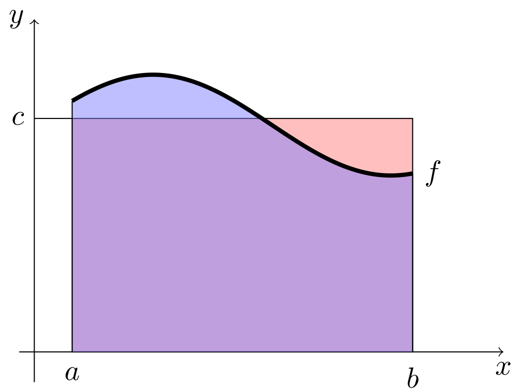
Poznámka 9.57

- Důsledek 9.56 má jednoduchý geometrický význam. Máme-li *nezápornou* integrovatelnou funkci f přes interval $[a, b]$, pak obsah podgrafu je stejný jako obsah obdélníka s délkou stran $b - a$ a c, viz Obrázek 9.10.
- Konstantě
$$c = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b - a}$$
se také říká *integrální průměr funkce f na intervalu* $[a, b]$ (odtud tedy označení „střední hodnota“). Jak se dá snadno vidět, integrál konstantní funkce $g(x) = c$, $x \in [a, b]$ přes $[a, b]$ je roven $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (to je i vidět z geometrického významu c pro nezápornou f).
- Věta 9.55 platí i v případě, že předpoklad nezápornosti funkce g nahradíme předpokladem nekladnosti funkce g. Dokažte! Inspirujte se důkazem Věty 9.55.

Důkaz následující věty je poněkud dlouhý, viz např. [4]. Jednodušší důkaz věty za silnějších předpokladů lze najít také v [10].

Věta 9.58 (2. věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní na intervalu $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



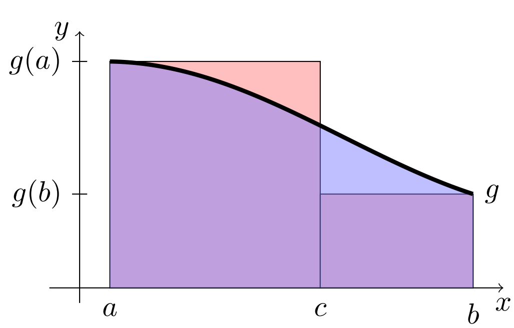
Obrázek 9.10: Geometrický význam Důsledku 9.56.

Odtud pro $f \equiv 1$ na $[a, b]$ dostáváme:

Důsledek 9.59. *Nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní na intervalu $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)(c-a) + g(b)(b-c).$$

Poznámka 9.60 Důsledek 9.59 má jednoduchý geometrický význam. Máme-li *nezápornou*, monotónní funkci g, integrovatelnou přes interval $[a, b]$, pak existuje konstanta $c \in [a, b]$ taková, že obsah podgrafu funkce g je roven součtu obsahů dvou obdélníků o délkách stran $g(a)$, $(c-a)$ a $g(b)$, $(b-c)$, viz Obrázek 9.11.



Obrázek 9.11: Geometrický význam Důsledku 9.59.

Pomocí 2. věty o střední hodnotě se dají také dokázat následující tvrzení, které lze použít při různých odhadech integrálů součinů funkcí.

Věta 9.61. *Nechť* $f \in \mathcal{R}([a,b])$. *Pak*

(a) je-li $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nezáporná a neklesající na* $[a,b]$ *nebo nekladná a nerostoucí na* $[a,b]$, *pak existuje* $c \in [a,b]$ *tak, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(b) je-li $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nezáporná a nerostoucí na* $[a,b]$ *nebo nekladná a neklesající na* $[a,b]$, *pak existuje* $c \in [a,b]$ *tak, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Předpokládejme, že g je nezáporná a neklesající na $[a,b]$. Definujeme funkci

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = a, \\ g(x) & \text{pro } x \in (a,b]. \end{cases}$$

Je vidět, že funkce g a $\tilde{g}$ jsou obě nezáporné a neklesající a liší se pouze v bodě $x = a$. Tedy i funkce $f \cdot g$ a $f \cdot \tilde{g}$ se liší pouze v bodě $x = a$. Pak podle Důsledku 9.31 platí

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní aplikujme Větu 9.58 na funkce f a $\tilde{g}$ a dostáváme $c \in [a,b]$ takové, že

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \tilde{g}(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \tilde{g}(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ostatní případy se dokáží podobně. □

9.6 Výpočetní metody Riemannova integrálu

Praktický výpočet Riemannova integrálu stojí na použití Leibnizovy–Newtonovy formule: nejprve vypočteme primitivní funkci a pak rozdíl funkčních hodnot této primitivní funkce v krajních bodech integračního intervalu – to tedy říká Věta 9.22. Následující věty nám mohou výpočet urychlit, protože nemusíme neustále opisovat stejné funkční předpisy. Zejména Věta 9.64 může představovat značné urychlení výpočtu, není třeba se totiž vracet k původní proměnné tak, jak je tomu při počítání primitivní funkce.

Věta 9.62 (metoda integrace per partes)**.** *Nechť* u, v *mají derivace* u', v' *na* $[a,b]$ *a* $u', v' \in \mathcal{R}([a,b])$. *Pak*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Z existence derivací u' a v' na $[a,b]$ plyne, že u, v a tedy i uv jsou spojité na intervalu $[a,b]$. Podle Věty 9.42 platí, že $u'v,\ uv' \in \mathcal{R}([a,b])$. Podle věty o derivaci součinu je funkce uv primitivní k funkci $u'v + uv'$ a z Věty 9.22 plyne

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

a s pomocí Lemmatu 9.36 dostáváme požadovaný vzorec. □

Než představíme větu o substituci, uveďme jednoduché zobecnění Leibnizovy–Newtonovy formule, které se bude hodit.

Věta 9.63. *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$, F je primitivní k f na (a,b) a spojitá na $[a,b]$. Pro každé $c, d \in [a,b]$ platí*

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c).$$

Důkaz. Je-li $c < d$, pak jde o Větu 9.22. Pro $c = d$ je levá strana rovnosti je levá strana podle Definice 9.45 rovna nule, tedy vzorec platí i pro tento případ. Nechť $c > d$. Pak

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x = -(F(c) - F(d)) = F(d) - F(c),$$

kde jsme v první rovnosti použili Definici 9.45 a druhá nerovnost opět plynula z Leibnizovy–Newtonovy formule. □

Věta 9.64 (substituční metoda)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $[c,d]$. Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a,b]$ derivaci φ' takovou, že $\varphi' \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\varphi([a,b]) \subset [c,d]$. Pak*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Ze spojitosti funkce f plyne, že k ní existuje na intervalu $[c,d]$ funkce primitivní, označme ji symbolem F. Pak $F \circ \varphi$ je primitivní k funkci $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ na $[a,b]$. Podle Věty 9.63 pak platí

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = (F \circ \varphi)(a) - (F \circ \varphi)(b) = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Poznamenejme, že u Riemannova integrálu nejsou dvě věty o substituci a to pouze jedna – Věta 9.64. Ta vlastně obsahuje současně obě věty o substituci pro primitivní funkce zároveň. A to bez ohraničujících předpokladů na funkci φ v druhé větě o substituci, přitom má stejné možnosti jako dává 2. věta o substituci pro primitivní funkci. Tento na první pohled překvapivý fakt lze vysvětlit třeba tím, že v prvním případě šlo o to, najít funkční předpis funkce (primitivní funkci) a v druhém případě pouze jedno jediné číslo (hodnotu Riemannova integrálu). Použití věty o substituci ilustruje následující příklad.

Příklad 9.65 Vypočtěte

(a) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, (b) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Řešení. ad (a): Kdyby u symbolu integrace nebyla dolní a horní mez, představoval by tento výraz primitivní funkci k funkci $x\mathrm{e}^{-x^2}$. Tu jsme hledali pomocí první věty o substituci pro $\varphi(x) = -x^2$. Zde je situace vlastně podobná, položíme

$$f(t) = \mathrm{e}^t, \quad \varphi(x) = -x^2, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Problém s tím, že místo $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -2x\,\mathrm{d}x$ máme pouze $x\,\mathrm{d}x$ vyřešíme stejně jako u primitivních funkcí – tentokrát nás k tomu opravňuje Lemma 9.37. Můžeme tedy psát

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = -x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,$$

kde jsme dolní mez nahradili funkční hodnotou φ v bodě 0, což je opět nula a horní mez jsme nahradili $\varphi(1) = -1^2 = -1$. Další výpočet je už jednoduchý. Stačí použít Newtonův–Leibnizův vzorec (resp. Větu 9.63), protože k funkci e^x známe primitivní funkci. Platí celkově

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t\right]_0^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

ad (b): Zde použijeme rovnost ve Větě 9.64 „v opačném pořadí“. Máme vlastně dánu funkci $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ a meze intervalu, přes který integrujeme, tzn. buď $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ nebo $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$. Naším úkolem je tedy vymyslet funkci φ definovanou na intervalu $[a, b]$, aby v krajních bodech nabývala předepsaných hodnot, a aby se touto substitucí výpočet zjednodušil. Inspirujeme-li se řešením Příkladu 8.26, můžeme vzít

$$\varphi(x) = \sin x, \quad [a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Je třeba zdůraznit, že v tomto případě není třeba kolem této substituce provádět složité úvahy, jako tomu bylo ve zmiňovaném příkladu. K použití dané substituce stačí jen vědět, že zvolená funkce má derivaci a že

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Platí

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Zdůrazněme, že jsme při výpočtu využili rovnosti $|\cos x| = \cos x$ platící pro $x \in [0, \pi/2]$. Šlo by zvolit i jiný interval $[a, b]$, např. $[0, 5\pi/2]$. V tomto případě funkce kosinus kladná není, aplikace věty o substituci by byla možná, ale zbytečně komplikovaná. ○

Poznámka 9.66 S lehkou úpravou řešení Příkladu 9.65(b) můžeme také spočítat (proveďte!), že pro každé $R > 0$ platí

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Nakreslíme-li si integrand, zjistíme, že jsme určili čtvrtinu obsahu kruhu o poloměru R. Takto tedy lze odvodit vzorec pro obsah kruhu. Pro úplnost dodejme, že číslo π jsme zde geometricky definovali jako polovinu délky kružnice o poloměru 1 (což není tak úplně v pořádku, protože v této chvíli ještě ani nevíme, co je délka křivky).

Poznámka 9.67 Jak jsme viděli, nejdůležitějším pojmem při počítání přesné hodnoty integrálu byla primitivní funkce. V případě, že primitivní funkci nejsme schopni najít, jsme nuceni používat alternativní metody. Např. v teorii funkce komplexní proměnné jsme schopni spočítat přesnou hodnotu integrálu mnoha funkcí, k nimž nejsme schopni najít primitivní funkce. To je již pokročilejší látka a nefunguje univerzálně. Další možností jsou různé přibližné metody, třeba pomocí funkčních řad, kdy se funkce nahradí součtem funkcí, jejichž integrál umíme přesně vypočítat. Důležitou roli v dnešní době hrají numerické metody, kterým je v každém matematickém kurzu věnován minimálně jeden semestr. Posledními dvěma metodami jsme schopni nalézt pouze přibližnou hodnotu integrálu.

9.7 Nevlastní Riemannův integrál

Často se budeme setkávat s potřebou počítat obsah podgrafu funkce na neohraničeném intervalu (např. v teorii pravděpodobnosti). V této kapitole si ukážeme, jak definovat integrál i pro funkce definované na neohraničeném intervalu, nebo které jsou samy neohraničené. V tom případě budeme mluvit o *nevlastním integrálu*:

- *vlivem meze*, tzn. integrujeme přes neohraničený interval a
- *vlivem funkce*, tzn. integrujeme sice přes ohraničený interval (ne nutně uzavřený) ale funkci, která je neohraničená.

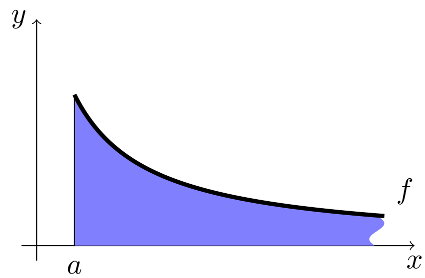
Důležitý je geometrický význam nevlastního integrálu nezáporné funkce. Jak uvidíme v Definici 9.68 a 9.89, půjde opět o obsah podgrafu funkce f. Ovšem tentokrát tento podgraf bude neohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, např.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq a \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

viz Obrázek 9.12. Zde pak nás bude hlavně bude zajímat otázka, zda tento obsah je konečný či nekonečný.

9.7.1 Nevlastní integrál vlivem meze

Podrobněji se podívejme na integraci přes neohraničený interval. Toto je velmi časté např. při definici distribuční funkce absolutně spojité náhodné veličiny v teorii pravděpodobnosti.



Obrázek 9.12: Podgraf nezáporné funkce f na neohraničeném intervalu $[a, \infty)$.

Definice 9.68 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a f je riemannovsky integrovatelná na každém uzavřeném ohraničeném podintervalu intervalu $[a, \infty)$. Definujeme funkci (integrál jako funkce horní meze)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, \infty).$$

Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to \infty} F(x)$$

pak říkáme, že nevlastní integrál

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

konverguje (existuje) a pokládáme

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x \to \infty} F(x).$$

V opačném případě říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje* (*neexistuje*).

Poznámka 9.69 Uvědomme si motivaci zavedení nevlastního integrálu. Chceme určit obsah podgrafu *nezáporné* funkce f na neohraničeném intervalu $[a, \infty)$, tedy obsah neohraničené množiny. K tomu účelu uvažujeme integrál jako funkce horní meze $F = F_a$, jejíž funkční hodnoty jsou obsahy částí podgrafu na ohraničených intervalech (tzn. jde o Riemannovy integrály), které pro $x \to \infty$ vyplní beze zbytku celý neohraničený podgraf. Hodnota obsahu celého podgrafu pak nutně musí být limita funkce F pro $x \to \infty$. Obsah je tedy konečný právě tehdy, když limita je vlastní.

Cvičení 9.70 Dokažte „větu o invarianci pro nevlastní integrál“: *Nechť $a, c \in \mathbb{R}, a < c$ a f je riemannovsky integrovatelná na každém uzavřeném ohraničeném podintervalu intervalu $[a, \infty)$. Pak integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Navíc, pokud jeden z těchto integrálů konverguje, platí*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tohoto faktu budeme často (bez zmínky) využívat v důkazech.

Poznámka 9.71

- Analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \in \mathbb{R}$, za předpokladu, že f je riemannovsky integrovatelná na každém uzavřeném ohraničeném podintervalu

intervalu $(-\infty, a]$. Pak lze totiž definovat funkci

$$F(x) = \int_x^a f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in (-\infty, a).$$

Říkáme pak, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje*, pokud existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

- Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ riemannovsky integrovatelná na *každém* uzavřeném ohraničeném intervalu (je tedy i definovaná na celém $\mathbb{R}$), pak lze definovat nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

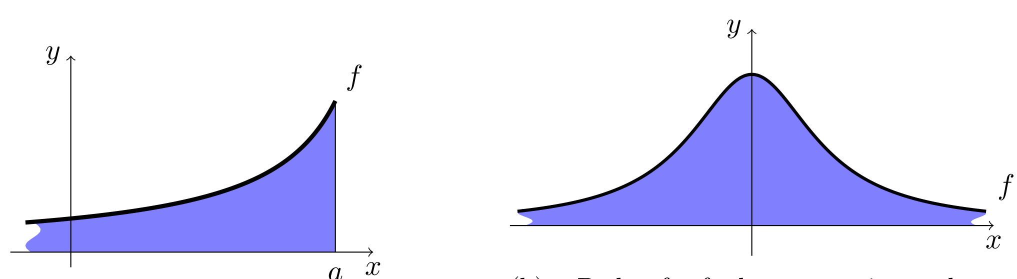
a to takto: Jestliže pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje* a pokládáme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je ale třeba dokázat, že definice tohoto integrálu nezávisí na volbě čísla a. To lze nechat na čtenáři.

- Podgrafy funkcí na neohraničeném intervalu $(-\infty, a]$ a celém $\mathbb{R}$ jsou načrtnuty na Obrázku 9.13.

- Zdůrazněme, že hodnota nevlastního integrálu nezáporné funkce je rovna obsahu jejího podgrafu na příslušném intervalu. Tedy, jeho konvergence, resp. divergence, je *ekvivalentní* s konečností, resp. nekonečností, obsahu podgrafu. Zhruba lze říct, že konvergence nevlastního integrálu $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ pro kladnou nerostoucí funkci f závisí na tom, jak *těsně se graf této funkce přimyká ke kladné poloose* x, neboli jak f „rychle klesá k nule“ pro $x \to \infty$ (viz Věty 9.75, 9.76 a 9.77).



(a) Podgraf funkce na intervalu $(-\infty, a]$.

(b) Podgraf funkce na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Obrázek 9.13: Podgrafy funkcí na neohraničených intervalech.

Příklad 9.72 Určete konvergenci resp. divergenci nevlastních integrálů

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R},$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Pokud je některý z nevlastních integrálů konvergentní, určete jeho hodnotu.

Řešení. ad (a): Nejprve si uvědomme, že integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[1, \infty)$, tzn. i na každém jeho uzavřeném ohraničeném podintervalu. Funkce F z Definice 9.68 je tedy dobře definovaná. Pro $\alpha \neq 1$ a $x > 1$ snadno spočítáme

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Pak

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1, \\ \infty & \alpha < 1. \end{cases}$$

Pro $\alpha = 1$ a $x > 1$ máme

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln|t|]_1^x = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

a tedy

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty.$$

Závěr: Pro $\alpha > 1$ integrál konverguje a je roven $\frac{1}{\alpha-1}$ a pro $\alpha \leq 1$ integrál diverguje.
ad (b): Snadno spočítáme, že

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} [\operatorname{arctg} t]_x^0 + \lim_{x\to\infty} [\operatorname{arctg} t]_0^x \\
&= \lim_{x\to-\infty} (0 - \operatorname{arctg} x) + \lim_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x - 0) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Nevlastní integrál tedy konverguje. Výpočet bychom krátce mohli zapsat také takto

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

kde výrazem $[F(x)]_a^b$ chápeme rozdíl příslušných *jednostranných limit* funkce F bodech a a b. ◯

Cvičení 9.73 Dokažte následující tvrzení: *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, c \in \mathbb{R}$. Pak*

(a) jestliže $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak konverguje i $\int_a^\infty cf(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^\infty cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) *jestliže* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *a* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergují, pak konverguje i* $\int_a^\infty (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$\int_a^\infty (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$$

V mnoha případech nás nezajímá přesná hodnota nevlastního integrálu ale pouze fakt, zda daný nevlastní integrál konverguje či diverguje. Představme si proto podmínky (nutné ale hlavně postačující) pro konvergenci, resp. divergenci.

Začněme nutnou a postačující podmínkou, kterou budeme používat zejména v důkazech efektivních postačujících podmínek.

Věta 9.74 (Bolzanova–Cauchyova nutná a postačující podmínka)**.** *Nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \geq a\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ x > x_0,\ y > x_0\ :\ \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Nevlastní integrál konverguje právě tehdy, když existuje vlastní limita $\lim_{x\to\infty} F(x)$, kde F je funkce z Definice 9.68. Podle Věty 5.41 je tato limita vlastní právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{R}_\delta(\infty) \subset [a, \infty)$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathcal{R}_\delta(\infty)$ platí $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$. Tvrzení pak plyne, položíme-li $x_0 = 1/\delta$ a všimneme-li si, že pro každé $x, y > x_0 = 1/\delta$ platí

$$|F(x) - F(y)| = |F(y) - F(x)| = \left|\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

□

Věta 9.75 (srovnávací kriterium)**.** *Nechť* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $a \in \mathbb{R}$*, existuje* $\mathcal{R}_\delta(\infty)$ *tak, že*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathcal{R}_\delta(\infty).$$

Pak

(a) *jestliže* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje, pak* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje,*

(b) *jestliže* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje, pak* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje.*

Důkaz. ad (a): Nechť $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle Věty 9.74 existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 1/\delta$ tak, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, $x > x_0$, $y > x_0$ platí

$$\left|\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňující $y \geq x > x_0$ platí

$$\left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t = \left|\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon,$$

kde nerovnost plyne z Věty 9.39. Je-li $x \geq y > x_0$, pak se stejný odhad provede podobně, viz Poznámku 9.47. Odtud zase z Věty 9.74 plyne, že i integrál $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje.
ad (b): Tato implikace je obměnou implikace (a). □

Věta 9.76 (limitní srovnávací kriterium). *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou kladné na nějakém $\mathcal{R}_\delta(\infty)$ a existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Pak*

(a) je-li $c < \infty$ a $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje,

(b) je-li $c > 0$ a $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Důkaz. Z předpokladu kladnosti f a g na nějakém $\mathcal{R}_\delta(\infty)$, podle Věty 5.29 platí, že $0 \leq c \leq \infty$.
ad (a): V tomto případě je $c \in [0, \infty)$, tedy limita funkce f/g v bodě ∞ je vlastní. Pak k $\varepsilon = 1$ existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 1/\delta$ tak, že pro každé $x > x_0$ platí

$$c - 1 < \frac{f(x)}{g(x)} < c + 1,$$

z čehož plyne, že pro každé $x > x_0$ platí

$$f(x) < (c + 1)g(x).$$

Protože $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak také konverguje $\int_a^\infty (c+1)g(x)\,\mathrm{d}x$, viz Cvičení 9.73. Z Věty 9.75 pak konverguje i $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.
ad (b): V tomto případě platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{c} \in [0, \infty).$$

Tedy na funkce g a f (v tomto pořadí) lze aplikovat část (a) této věty. Ta říká, že kdyby $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergoval, pak by konvergoval i $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$. To je ale obměna právě dokazovaného tvrzení. □

Nyní jsme připraveni dokázat nutnou podmínku konvergence. Ta se používá zejména k důkazu divergence nevlastního integrálu.

Věta 9.77 (nutná podmínka konvergence). *Nechť $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a existuje $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$. Pak $c = 0$.*

Důkaz. (sporem) Předpokládejme, že integrál konverguje a přitom $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \neq 0$. Nechť nejprve $c > 0$. Protože

$$\int_a^\infty 1\,\mathrm{d}x = \infty,$$

pak z Věty 9.76(b) pro $g(x) = 1$, $x \in [a, \infty)$ dostáváme, že integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, což je ve sporu s předpokladem. Nechť $c < 0$. Dojdeme pak také ke sporu, aplikujeme-li opět Větu 9.76(b) na funkci $-f$ a konstantní funkci $g(x) = 1$. □

Příklad 9.78 Vyšetřete konvergenci nevlastního integrálu

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{pro } \alpha \leq 0.$$

Řešení. Tento nevlastní integrál jsme již vyšetřovali v Příkladu 9.72. Pro hodnotu parametru $\alpha < 0$ dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \infty > 0$$

a pro $\alpha = 0$ dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 1 > 0.$$

V obou případech *není* splněna nutná podmínka konvergence, tedy podle Věty 9.77 integrál diverguje. ○

Poznámka 9.79 Z Věty 9.76 můžeme odvozovat postačující podmínky pro konvergenci $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ pro nezápornou funkci f na $[a,\infty)$ a to volbou konkrétních funkcí g, např.

- jestliže existuje $k > 1$ takové, že $\lim_{x\to\infty} x^k f(x)$ je vlastní, pak $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje,
- jestliže existuje $k \le 1$ takové, že $\lim_{x\to\infty} x^k f(x) > 0$, pak $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Srovnávací kriteria jsme mohli používat jen pro funkce, které byly kladné (resp. nezáporné) na nějakém redukovaném okolí bodu ∞. Následující dvě kriteria se používají pro funkce, které nemusejí být nutně kladné.

Věta 9.80 (Abelovo kriterium)**.** *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, g je monotónní a ohraničená na $[a,\infty)$. Pak $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.*

Důkaz. Z předpokladu věty plyne, že existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tak, že pro každé $x \in [a,\infty)$ platí

$$|g(x)| \le k.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle Věty 9.74 existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, $x > x_0$, $y > x_0$ platí

$$\left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ takové, že $y > x > x_0$ podle 2. věty o střední hodnotě integrálního počtu (Věta 9.58) existuje $c \in [x, y]$ tak, že

$$\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Odtud pak plyne, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ takové, že $y > x > x_0$ platí odhad

$$\left|\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le |g(x)|\left|\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + |g(y)|\left|\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| < k\frac{\varepsilon}{2k} + k\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

Podle Věty 9.74 integrál $\int_a^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. □

Věta 9.81 (Dirichletovo kriterium)**.** *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tak, že pro každé $b > a$ platí*

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq k,$$

g je monotónní na $[a, \infty)$ a

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Pak $\int_a^\infty f(x)g(x)\, \mathrm{d}x$ konverguje.

Důkaz. Z předpokladu věty plyne, že pro každé $c, d \in \mathbb{R}$, $c, d > a$ platí

$$\left| \int_c^d f(x)\, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^d f(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_a^d f(x)\, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq 2k.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x > x_0$ platí

$$|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4k}.$$

Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ takové, že $y > x > x_0$ podle 2. věty o střední hodnotě integrálního počtu (Věta 9.58) existuje $c \in [x, y]$ tak, že

$$\int_x^y f(t)g(t)\, \mathrm{d}t = g(x) \int_x^c f(t)\, \mathrm{d}t + g(y) \int_c^y f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Odtud pak plyne, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ takové, že $y > x > x_0$ platí odhad

$$\left| \int_x^y f(t)g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq |g(x)| \left| \int_x^c f(t)\, \mathrm{d}t \right| + |g(y)| \left| \int_c^y f(t)\, \mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{4k} \cdot 2k + \frac{\varepsilon}{4k} \cdot 2k = \varepsilon.$$

Podle Věty 9.74 integrál $\int_a^\infty f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$ konverguje. □

Příklad 9.82 Dokažte, že

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$$

konvergují pro $\alpha > 0$.

Řešení. Ukažme řešení prvního příkladu – druhý si čtenář snadno spočítá podobně. Položme $a = 1$, $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Ověříme, že jsou splněny předpoklady Věty 9.81. Pro každé $b > 1$ platí

$$\left| \int_1^b \sin x\, \mathrm{d}x \right| = |-\cos b + \cos 1| \leq |\cos b| + |\cos 1| \leq 2,$$

tedy nerovnost z Věty 9.81 platí pro $k = 2$. Dále

$$g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0, \quad x > 1,$$

tzn. g je na $[1, \infty)$ klesající. Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Podle Dirichletova kriteria je tedy integrál konvergentní. ○

Věta 9.83. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Jestliže $\int_a^\infty |f(x)| \,\mathrm{d}x$ konverguje, pak $\int_a^\infty f(x) \,\mathrm{d}x$ konverguje.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože $\int_a^\infty |f(x)| \,\mathrm{d}x$ konverguje, pak podle Věty 9.74 existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > x_0$ platí

$$\left| \int_x^y |f(t)| \,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

S využitím Poznámky 9.47 dostáváme pro $x, y > x_0$ odhad

$$\left| \int_x^y f(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_x^y |f(t)| \,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Z Věty 9.74 pak okamžitě plyne, že konverguje také $\int_a^\infty f(x) \,\mathrm{d}x$. □

Poznámka 9.84 Obrácená implikace k implikaci z Věty 9.83 neplatí. Jak již víme z Příkladu 9.82, tak $\int_1^\infty \sin x/x \,\mathrm{d}x$ konverguje, ale dá se dokázat, že $\int_1^\infty |\sin x|/x \,\mathrm{d}x$ diverguje.

Definice 9.85 Řekneme, že $\int_a^\infty f(x) \,\mathrm{d}x$ *konverguje*

(a) *absolutně (AK)*, jestliže $\int_a^\infty |f(x)| \,\mathrm{d}x$ konverguje,

(b) *relativně (neabsolutně, RK, NK)*, jestliže $\int_a^\infty f(x) \,\mathrm{d}x$ konverguje, ale $\int_a^\infty |f(x)| \,\mathrm{d}x$ diverguje.

Následující věta již plyne z Vět 9.75 a 9.76.

Věta 9.86. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g je nezáporná na $[a, \infty)$ a $\int_a^\infty g(x) \,\mathrm{d}x$ konverguje. Platí-li*

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{pro všechna } x \in [a, \infty),$$

nebo

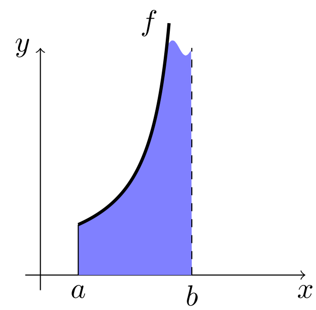
$$\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty,$$

pak $\int_a^\infty f(x) \,\mathrm{d}x$ konverguje absolutně.

9.7.2 Nevlastní integrál vlivem funkce

Nyní se podívejme na případ integrace neohraničené funkce na ohraničeném intervalu. Přitom budeme předpokládat, že tato neohraničenost je lokalizovaná na jeden z krajních bodů intervalu, přes který se integruje – říká se mu *singulární bod.*

Definice 9.87 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod funkce f*, jestliže f je neohraničená na $[a, b)$, ale je integrovatelná na každém podintervalu $[a, c]$, kde $c \in (a, b)$.



Obrázek 9.14: Podgraf funkce se singularitou v pravém krajním bodě intervalu.

Poznámka 9.88 Na Obrázku 9.14 je zobrazen podgraf funkce f na intervalu $[a, b)$ se svým singulárním bodem b. Vidíme, že podgraf je neohraničná množina.

Definice 9.89 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na intervalu $[a, b)$ a b je singulární bod f. Definujeme funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Existuje-li vlastní $\lim_{x\to b-} F(x)$, pak říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje (neboli existuje) a pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-} F(x).$$

Poznámka 9.90 Analogicky se definuje singulární bod a funkce f definované na intervalu $(a, b]$; a také nevlastní $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Konečně lze definovat i nevlastní integrál jsou-li oba a, b singulární body funkce f – podobně, jako u nevlastního integrálu přes celé $\mathbb{R}$.

Poznámka 9.91 Porovnáme-li definice nevlastních integrálů vlivem funkce vs. vlivem meze, zjistíme, že mají spoustu společného. V obou případech definujeme pomocnou funkci F což je integrál jako funkce horní meze, přitom konvergence či divergence nevlastního integrálu závisí na existenci či neexistenci vlastní limity funkce F v levém krajním bodě integračního intervalu. Opět konvergence nevlastního integrálu odpovídá konečnosti obsahu podgrafu. V Definici 9.68 je to nevlastní bod ∞ a v Definici 9.89 jde o singulární bod $b \in \mathbb{R}$ funkce f.

Věta 9.92 (Bolzanova–Cauchyova nutná a postačující podmínka)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na $[a, b)$, přičemž b je její singulární bod. Nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in [a, b)\ \forall x, y \in (x_0, b)\ :\ \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Větu dokážeme stejně jako Větu 9.74, přičemž jediný rozdíl spočítá v tom, že aplikujeme Větu 5.41 pro limitu zleva v bodě b. □

S Bolzanovou–Cauchyovou větou již můžeme dokazovat kriteria konvergence, jako jsou pro nevlastní integrály vlivem meze. Ovšem pouze některá – např. srovnávací kriterium (analogie Věty 9.75). Důkaz je určen čtenáři jako užitečné cvičení.

Věta 9.93 (srovnávací kriterium)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou definované na* $[a, b)$, *přitom* b *je jejich singulární bod a existuje* $\mathcal{R}^-(b)$ *tak, že*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathcal{R}^-(b).$$

Pak

(a) jestliže $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje, pak* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje,*

(b) jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje, pak* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje.*

Kapitola 10

Aplikace integrálního počtu

Použití Riemannova integrálu se neomezuje jen pro výpočty obsahů rovinných útvarů, kterými bylo jeho zavedení motivováno, ale lze počítat i přesné hodnoty délek křivek, objemy některých těles a také těžiště křivek a rovinných útvarů. V této kapitole se omezíme zejména na vypíchnutí hlavních myšlenek, a to v případech, kdy ukázaná „odvození“ poslouží k lepšímu zapamatování či rychlému odvození. Podrobněji a korektněji jsou aplikace popsány např. v [4].

10.1 Délka křivky

Zde si ukážeme odvození vzorců pro délku křivky pro několik případů: délku grafu funkce, délku křivky zadanou parametricky a v polárních souřadnicích.

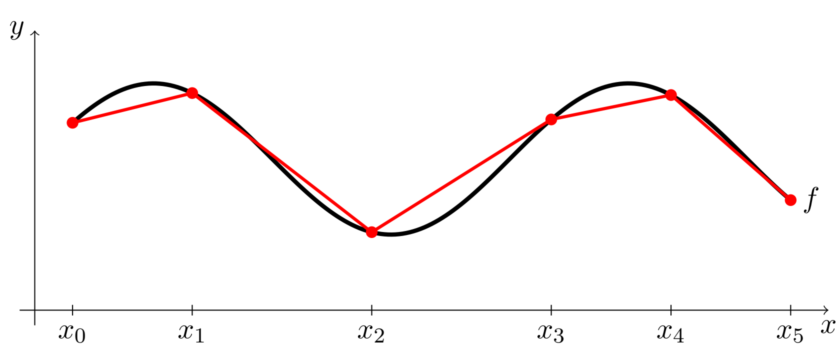
10.1.1 Délka grafu funkce

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitou na intervalu $[a, b]$. Než si ukážeme odvození vzorce pro délku jejího grafu, musíme si napřed ujasnit, co touto délkou rozumíme.

Uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $[a, b]$. K němu můžeme přiřadit lomenou čáru (polygon) spojující body

$$\big(x_0, f(x_0)\big), \quad \big(x_1, f(x_1)\big), \quad \dots, \quad \big(x_n, f(x_n)\big),$$

což jsou body ležící na grafu funkce f, viz Obrázek 10.1.



Obrázek 10.1: Graf funkce a aproximující lomená čára (červeně).

Délka této lomené čáry je rovna součtu délek úseček, ze kterých je složena, tzn. je rovna

$$\ell(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2}.$$

Podobně jako tomu bylo u dolních součtů Riemannova integrálu, platí pro každá dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}([a,b])$, pro která $D_1 \subset D_2$ nerovnost $\ell(f,D_1) \leq \ell(f,D_2)$. Jak se dá očekávat i z obrázku, čím jemnější bude dělení D, tím přesnější je číslo $\ell(f,D)$ aproximací délky grafu funkce f. Délku grafu funkce f proto definujeme následovně.

Definice 10.1 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$. Pak délkou grafu funkce f na intevalu $[a,b]$ rozumíme

$$\ell(\operatorname{graf} f) = \sup\{\ell(f,D)\ ;\ D \in \mathfrak{D}([a,b])\}.$$

Zajímavé je to, že délka spojité funkce může být nekonečná. *Předpokládejme dále, že funkce f má spojitou derivaci na intervalu* $[a,b]$. Za tohoto předpokladu se dá dokázat, že délka grafu funkce f je zaručeně konečná, a že pro každou nulovou posloupnost $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{m\to\infty} \ell(f,D_m) = \ell(\operatorname{graf} f).$$

Odvoďme si vzorec pro výpočet této délky. Uvažujme libovolné dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $[a,b]$. Pak podle Lagrangeovy věty pro každé $i = 1,\ldots,n$ existují $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ taková, že

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Proto lze psát

$$\ell(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'^2(c_i)(x_i - x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}).$$

Uvažujme nyní pomocnou funkci

$$g(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad x \in [a,b].$$

Pak zřejmě

$$\ell(f,D) = i(g,D,V)$$

kde $V = \{c_1,\ldots,c_n\} \sqsubset D$, tedy délka uvažovaného polygonu je rovna jistému integrálnímu součtu funkce g. Protože je podle předpokladu f' spojitá, pak g je integrovatelná na $[a,b]$ a podle Věty 9.20 pro nulovou posloupnost dělení $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ intervalu $[a,b]$ a příslušnou posloupnost výběrů $\{V_m\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $V_m \sqsubset D_m$ platí

$$\ell(\operatorname{graf} f) = \lim_{m\to\infty} \ell(f,D_m) = \lim_{m\to\infty} i(g,D_m,V_m) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Shrňme naše odvození do věty.

Věta 10.2. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a,b]$ spojitou derivaci. Pak pro délku grafu funkce f platí*

$$\ell(\operatorname{graf} f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 10.3 Vypočtěte délku křivky, která je dána jako graf restrikce funkce $\ln x$ na interval $\left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right]$.

Řešení. Dosazením do vzorce z Věty 10.2 máme

$$\begin{aligned}\ell(\text{graf } f) &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{lll} t=\sqrt{x^2+1} & x=\sqrt{3} & t=2 \\ x=\sqrt{t^2-1} & x=\sqrt{8} & t=3 \\ \mathrm{d}x=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t & & \end{array}\right| \\ &= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

○

10.1.2 Délka křivky dané parametricky

Podívejme se na křivku zadanou obecně – na střední škole se říká „parametricky“.

Definice 10.4 Nechť $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mají spojité derivace na intervalu $[a, b]$ a jsou takové, že $\varphi'^2(t) + \varphi'^2(t) > 0$ (tzn. $(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))$ je nenulový vektor) pro každé $t \in [a, b]$. Pak zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad t \in [a, b]$$

nazýváme *hladkou (rovinnou) křivkou.* Funkce φ_1 a φ_2 nazýváme jejími *složkami* a značíme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Množinu

$$[\varphi] = \{\varphi(t)\ ;\ t \in [a, b]\}$$

nazýváme *geometrickým obrazem křivky* φ nebo také *grafem křivky* φ. Křivku nazýváme *prostou,* jestliže pro každé $t, s \in [a, b]$ takové, že $0 < |t - s| < b - a$ platí $\varphi(t) \neq \varphi(s)$.

Parametrem je myšlena proměnná t (z anglického „time“), které se také říká „časová proměnná“. Má to svoje odůvodnění. Vytváření grafu křivky lze prakticky provést tak, že zabodneme pero do bodu $(\varphi_1(a), \varphi_2(a)) \in \mathbb{R}^2$ a pak pokračujeme dále body (x, y), kde

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \varphi_2(t) \end{aligned}$$

pro t postupně se zvětšující až k b. Často tedy říkáme, že křivka v čase t prochází bodem $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

Poznámka 10.5 Všimněme si, že křivkou se rozumí zobrazení, nikoliv množina v rovině – tu zase nazýváme geometrickým obrazem křivky. To je trochu rozdíl od středoškolského pojetí, kdy křivkou je často chápána množina bodů, která má své parametrizace (těmto parametrizacím my říkáme křivky). Např. dvě křivky

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

a

$$\psi(t) = (\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

mají stejný geometrický obraz – jde o jednotkovou kružnici. Rozdíl je v tom, že pro rostoucí parametr t bod $\varphi(t)$ obíhá opačným směrem než bod $\psi(t)$. Kružnice je „vykreslena opačným směrem“. Tím zajímavosti této definice nekončí. Máme-li množinu, která je geometrickým obrazem nějaké křivky, je také obrazem nekonečného množství křivek. „Způsob vykreslení“ geometrického obrazu se může lišit nejen na směru oběhu ale také na rychlosti. Křivky jsou velmi zajímavé matematické objekty a jsou jedním ze základních pojmů diferenciální geometrie.

Poznámka 10.6 Definice délky křivky je podobná jako definice délky grafu funkce. Pro každé dělení definičního oboru křivky uvažujeme lomenou čáru tvořenou odpovídajícími body na křivce. Délku pak definujeme jako supremum všech délek takových polygonů. Mimochodem graf funkce f definované na intervalu $[a, b]$ je vlastně roven grafu křivky dané parametrickými rovnicemi

$$x = t, \quad y = f(t), \quad t \in [a, b],$$

tzn. pro $\varphi_1(t) = t$ a $\varphi_2(t) = f(t)$ kde $t \in [a, b]$.

Odvození vzorce pro délku obecně zadané křivky je podobné jako u grafu funkce, viz např. [4, 10].

Věta 10.7. *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ je prostá hladká křivka. Pak pro její délku platí*

$$\ell(\varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Poznamenejme, že křivku můžeme definovat i v trojrozměrném prostoru, a dokonce obecně v n-rozměrném prostoru. Křivka je pak tvořena pouze více složkami (na každou dimenzi jedna): $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Délka takové křivky se definuje analogicky případu ve dvou dimenzích a vzorec pro délku takové křivky je jednoduchým zobecněním vzorce pro délku křivky v rovině. Je to

$$\ell(\varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^n \varphi_i'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

10.1.3 Délka křivky dané v polárních souřadnicích

Podíváme se na výpočet délky křivky zadané v polárních souřadnicích – a to ještě pro speciální případ. Křivka bude jednoznačně určená pomocí nezáporné spojité funkce $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\rho) = [\alpha, \beta]$, kde $\beta - \alpha \le 2\pi$ (to zaručuje, že následující křivka bude prostá). Křivka je pak daná předpisem

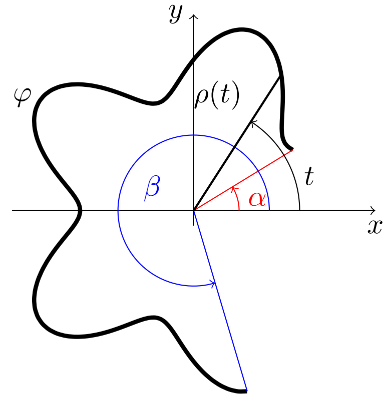
$$x = \varphi_1(t) = \rho(t)\cos t, \quad y = \varphi_2(t) = \rho(t)\sin t, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Tedy bod $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ má od počátku vzdálenost $\rho(t)$ a přitom t je (orientovaný) úhel, který svírá kladná poloosa x s polopřímkou s koncovým bodem v počátku obsahující bod $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, viz Obrázek 10.2.

Za předpokladu, že ρ má spojitou derivaci na $[\alpha, \beta]$, lze snadno určit délku křivky, kterou definuje. Protože odpovídající křivka φ je hladká, podle Věty 10.7 dostáváme, že

$$\ell(\varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho'(t)\cos t - \rho(t)\sin t)^2 + (\rho'(t)\sin t + \rho(t)\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Můžeme tak vyslovit následující větu.



Obrázek 10.2: Křivka zadaná v polárních souřadnicích o středu v počátku.

Věta 10.8. *Nechť $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, kde $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. Pak délka křivky dané předpisem*

$$x = \rho(t) \cos t, \quad y = \rho(t) \sin t, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

je rovna

$$\ell(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t)}\, \mathrm{d}t.$$

10.2 Obsah rovinného útvaru

Obsahem rovinného útvaru jsme dokonce motivovali zavedení Riemannova integrálu. Nepřekvapí tedy následující definice.

Definice 10.9 Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná na $[a, b]$. Pak číslo

$$S(A) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

nazýváme *obsahem množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

tj. obsah množiny, která je omezená přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafem funkce f na intervalu $[a, b]$.

Poznámka 10.10 Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá a nekladná na $[a, b]$, definujeme obsah množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$$

jako číslo

$$S(A) = \left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right|.$$

Při počítání obsahů množin v rovině používáme přirozený požadavek na pojem obsahu množiny, což je

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B),$$

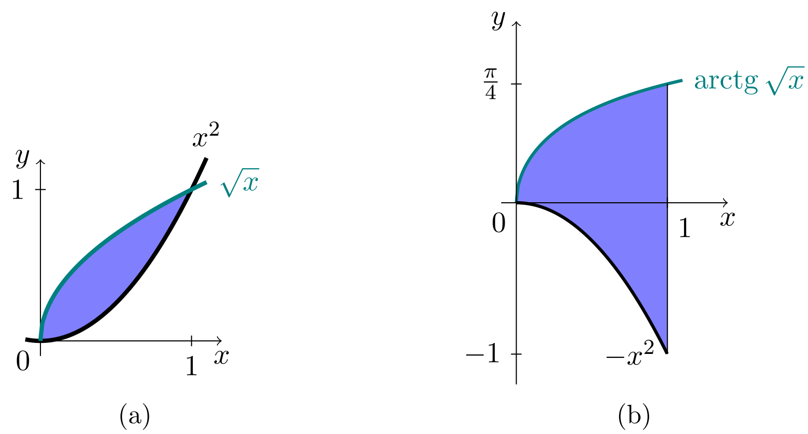
kde $A, B \subset \mathbb{R}^2$ jsou takové, že $A \cap B$ je „jednorozměrná množina" v $\mathbb{R}^2$ (tzn. něco jako geometrický obraz křivky).

Věta 10.11. *Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité na $[a, b]$ a $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$. Pak pro obsah množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

platí

$$S(A) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obrázek 10.3: Množiny z Příkladu 10.12.

Příklad 10.12 Je dána množina $A \subset \mathbb{R}^2$ omezená křivkami o rovnicích

(a) $y = x^2$, $x = y^2$,

(b) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

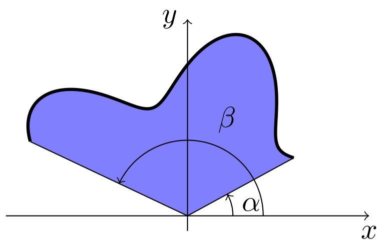
Určete obsah množiny A.

Řešení. ad (a): Nejprve je vhodné načrtnout si hranici oblasti, jejíž obsah máme počítat – viz Obrázek 10.3a. Z něj již můžeme snadno vidět použití Věty 10.11. Platí

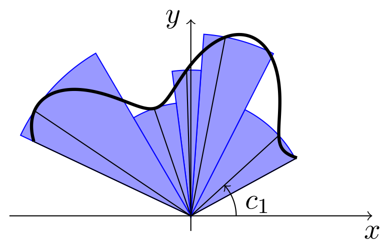
$$S(A) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

ad (b): Množina A je v tomto případě načrtnuta na Obrázku 10.3b. Pak

$$S(A) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x} - (-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}. \qquad \bigcirc$$



(a) Obsah rovinného obrazce jehož hranice je dána v polárních souřadnicích.



(b) Geometrický význam pro analogii integrálního součtu

Obrázek 10.4: Obrazec zadaný pomocí křivky v polárních souřadnicích.

Rovinné útvary jsou zadány svými hranicemi. Tyto hranice mohou být různé. Např. pomocí křivky v polárních souřadnicích. Uvažujme spojitou nezápornou funkci $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na intervalu $[\alpha, \beta]$ a zkusme odvodit vzorec pro obsah množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = r \cos t, \;\; y = r \sin t, \;\; t \in [\alpha, \beta], \;\; 0 \le r \le \rho(t)\}$$

viz Obrázek 10.4a. Tento rovinný útvar lze aproximovat podobně jako podgraf funkce, s tím rozdílem, že místo obdélníků zvolíme kruhové úseče se středem v počátku. Zvolme $D = \{t_0, \ldots, t_n\}$ dělení intervalu $[\alpha, \beta]$ a výběr $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ z dělicích intervalů dělení D. Pak číslo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \rho^2(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

je analogií k integrálnímu součtu (viz Definici 9.16) a odpovídá součtu obsahů jistých kruhových výsečí – viz Obrázek 10.4b.

Protože toto číslo je vlastně integrální součet funkce $g(t) = \frac{1}{2}\rho^2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, nepřekvapí tedy, že obsah je roven

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) \, \mathrm{d}t.$$

Vyslovme příslušnou větu.

Věta 10.13. *Nechť $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná na $[\alpha, \beta]$, kde $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$. Pak pro obsah množiny $A \subset \mathbb{R}^2$, omezené křivkou $\rho = \rho(t)$, kde ρ a t jsou polární souřadnice v $\mathbb{R}^2$ a polopřímkami $t = \alpha, t = \beta$, platí*

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) \, \mathrm{d}t.$$

10.3 Objem rotačních těles

Pomocí Riemannova integrálu můžeme počítat i objemy. A to objemy rotačních útvarů, které získáme rotací podgrafu nezáporné funkce okolo osy x nebo y v prostoru.

Věta 10.14. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, nezáporná na $[a, b]$. Pak pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

kolem

- *osy x, platí*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

- *osy y (za dodatečného předpokladu $0 \le a < b$), platí*

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důsledek 10.15. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité, $0 \le g \le f$ na $[a, b]$. Pak pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

kolem

- *osy x, platí*

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x,$$

- *osy y (za dodatečného předpokladu $0 \le a < b$), platí*

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Ukažme si, jak si vzorce z Věty 10.14 zhruba odvodit.

10.3.1 Rotace okolo osy x

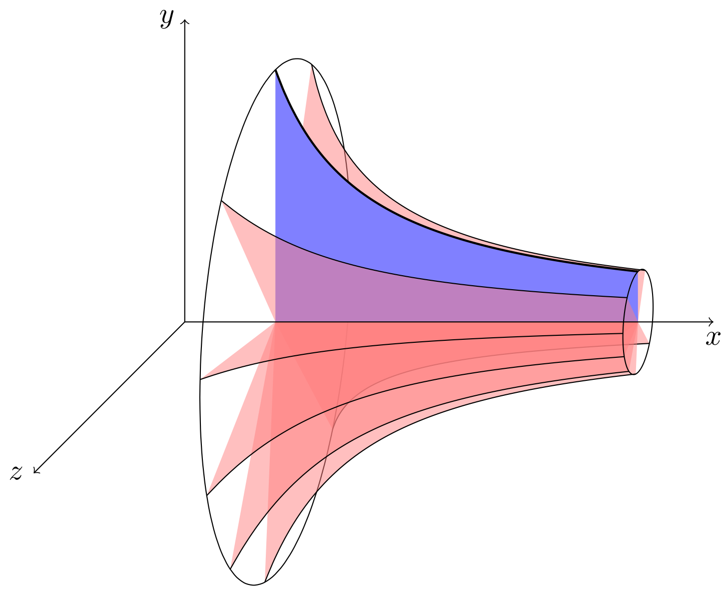
Uvažujme spojitou nezápornou funkci f na $[a, b]$ a těleso vzniklé rotací podgrafu této funkce okolo osy x, viz Obrázek 10.5.

Jeho objem zřejmě můžeme aproximovat takto: Uvažujme dělení $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ intervalu $[a, b]$, $V = \{c_1, \dots, c_n\} \sqsubset D$, pak rotační těleso lze aproximovat válci o výšce $x_i - x_{i-1}$ a poloměru základny $f(c_i)$. Objem rotačního tělesa je tedy přibližně

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \pi f^2(c_i) = \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

což je integrální součet funkce $g(x) = \pi f^2(x)$, $x \in [a, b]$. Tedy opět nepřekvapí, že objem tohoto tělesa je roven

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obrázek 10.5: Rotace podgrafu okolo osy x v prostoru.

10.3.2 Rotace okolo osy y

Uvažujme spojitou nezápornou funkci f na $[a,b]$, kde $0 \leq a < b$. Uvažujme těleso vzniklé rotací podgrafu funkce f na $[a,b]$ okolo osy y, viz Obrázek 10.6. Jak odvodit vzorec pro výpočet objemu takového tělesa? Nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $[a,b]$, $V = \{c_1, \dots, c_n\} \sqsubset D$. Rotační těleso lze aproximovat útvary, které vzniknou z válců se základnou v rovině xz o poloměru x_i a výšce $f(c_i)$, ze kterých se vyjmou válce se základnou v rovině xz o poloměru x_{i-1} a výšce $f(c_i)$. Objem tohoto útvaru je roven číslu

$$\pi x_i^2 f(c_i) - \pi x_{i-1}^2 f(c_i) = \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(c_i) = \pi f(c_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Pro dostatečně jemné dělení pak platí $x_i \approx c_i$ a $x_{i-1} \approx c_i$, tedy součet objemů všech těchto útvarů je

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(c_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f(c_i) 2c_i (x_i - x_{i-1}) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} c_i f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tím jsme „zdůvodnili“ tvar vzorce pro objem rotačního tělesa kolem osy y, což je

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

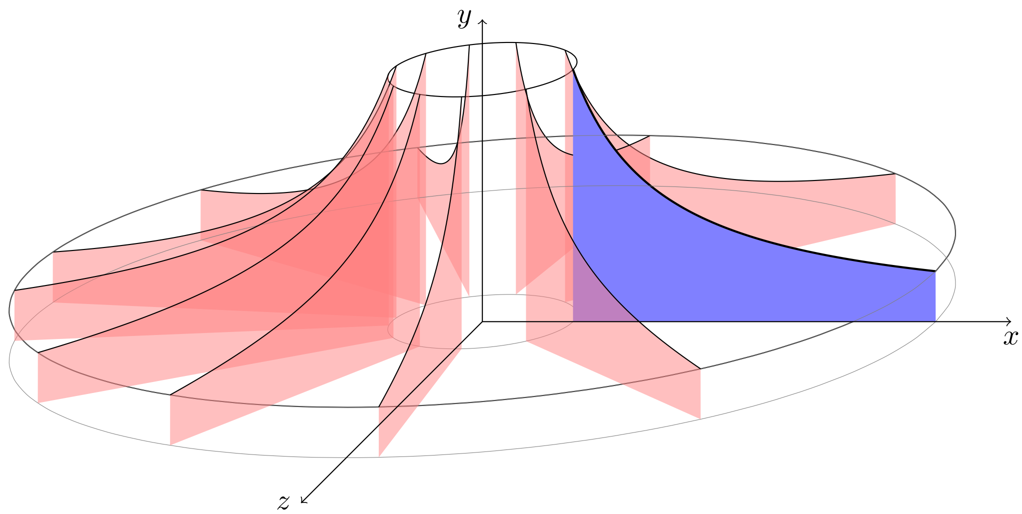
Příklad 10.16 Vypočtěte objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinného útvaru ohraničeného

(a) $y = \frac{\ln x}{x}$, $y = 0$, $x = \mathrm{e}$, kolem osy x,

(b) $y = \cos x^2$, $y = 1$, $x = 1$, kolem osy y.

Řešení. Dosazením do vzorců snadno spočítáme:
ad (a):

$$V = \pi \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = \mathrm{e}^t, & x = 1, & t = 0 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, & x = \mathrm{e}, & t = 1 \end{matrix} \right| = \pi \int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \pi \left(2 - \frac{5}{\mathrm{e}}\right).$$



Obrázek 10.6: Rotace podgrafu okolo osy y v prostoru.

ad (b):

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1-\cos x^2)\,\mathrm{d}x = \left[2\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 x\cos x^2\,\mathrm{d}x = \pi - \pi \sin 1.$$ ○

10.4 Obsah rotační plochy

Rotační plochou rozumíme plášť rotačního tělesa. Zde se spokojíme pouze s výčtem těch nejdůležitějších vzorců.

Věta 10.17. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na $[a, b]$. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací množiny $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \le x \le b,\ y = f(x)\}$ kolem*

- *osy x, platí*

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

- *osy y (za dodatečného předpokladu $0 \le a \le b$), platí*

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 10.18 Vypočtěte obsah rotační plochy vzniklé rotací grafu funkce

$$f(x) = 2\sqrt{x}, \quad x \in [0, 3]$$

okolo osy x.

Řešení. Podle vzorce snadno spočítáme

$$S = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{56}{3}\pi.$$ ○

10.5 Těžiště

Ukažme si ještě nějakou fyzikální aplikaci – např. těžiště křivky a rovinného útvaru.

10.5.1 Těžiště rovinné křivky

Těžištěm křivky je bod

$$T = \left[\frac{S_y}{H}, \frac{S_x}{H}\right],$$

kde

1. je-li graf křivky dán jako graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ na $[a, b]$ a má-li f na $[a, b]$ spojitou derivaci, pak

$$H = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,\ S_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,\ S_y = \int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

2. je-li $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ prostá hladká křivka, φ_i jsou definovány na $[\alpha, \beta]$, pak

$$H = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\,\mathrm{d}t,\ S_x = \int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\sqrt{\varphi_1^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$S_y = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

3. je-li křivka dána v polárních souřadnicích $\rho = \rho(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, kde $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, a ρ má spojitou derivaci na $[\alpha, \beta]$, pak

$$H = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\,\mathrm{d}t,\ S_x = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\sin t\,\mathrm{d}t,$$

$$S_y = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\cos t\,\mathrm{d}t.$$

10.5.2 Těžiště rovinného obrazce

Těžištěm podgrafu nezáporné spojité funkce f na intervalu $[a, b]$ je bod

$$T = \left[\frac{S_y}{H}, \frac{S_x}{H}\right],$$

kde

$$H = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ S_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,\ S_y = \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Literatura

[1] Balcar, B.; Štěpánek, P.: *Teorie množin.* Praha: Academia, 2000.

[2] Bělohlávek, R.; Vychodil, V.: *Diskrétní matematika pro informatiky I.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 2004.
URL `http://belohlavek.inf.upol.cz/vyuka/dm1.pdf`

[3] Botur, M.: *Úvod do aritmetiky.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 2011.

[4] Došlý, O.; Zemánek, P.: *Integrální počet v* $\mathbb{R}$. Brno: Masarykova univerzita, 2011.

[5] Děmidovič, B.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment, 2003.

[6] Garnier, R.; Taylor, J.: *100% Mathematical Proof.* Chichester: Wiley, 1996.

[7] Kojecká, J.: *Řešené příklady z matematické analýzy II.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1998.

[8] Kojecká, J.; Kojecký, T.: *Matematická analýza pro 1. semestr.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1997.

[9] Kojecká, J.; Závodný, M.: *Příklady z matematické analýzy I.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1999.

[10] Kopáček, J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky I.* Praha: matfyzpress, 2004.

[11] Schwabik, Š.; Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu.* Dějiny matematiky, Praha: Prometheus, 1996.
URL `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400862`

[12] Šimša, J.: Vývoj představ o reálných číslech. In *Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997*, Praha: Prometheus, 1999, s. 258–282.
URL `http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/401581`

[13] Sochor, A.: *Klasická matematická logika.* Praha: Karolinum, 2001.

[14] Sochor, A.: *Logika pro všechny ochotné myslet.* Praha: Karolinum, 2011.

[15] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Praha: Academia, 2002.
URL `http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf`

[16] Thiele, R.: *Matematické důkazy.* Praha: SNTL, 1986.

[17] Velleman, D.: *How to prove it : a structured approach.* New York: Cambridge University Press, 2006.

Rejstřík

doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

Výkonný redaktor Mgr. Miriam Delongová
Odpovědný redaktor Mgr. Tereza Vintrová
Technická redakce doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
Návrh a grafické zpracování obálky Bc. Karina Pavlíková

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.vydavatelstvi.upol.cz
www.e-shop.upol.cz
vup@upol.cz

Neprodejná publikace

Publikace neprošla jazykovou úpravou ve VUP.

1. vydání
Olomouc 2020

ISBN 978-80-244-5743-7
VUP 2020/0017